INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA FINANCEIRA

SUMÁRIO

1- INTRODUÇÃO

A **matemática financeira** é a área da matemática que estuda a equivalência de capitais no tempo, ou seja, como se comporta o valor do dinheiro no decorrer do tempo.
Sendo um área aplicada da Matemática, estuda diversas operações ligadas ao dia a dia das pessoas. Por esse motivo, conhecer suas aplicações é fundamental.

Como exemplos dessas operações podemos citar as aplicações financeiras, empréstimos, renegociação de dívidas, ou mesmo, tarefas simples, como calcular o valor de desconto num determinado produto.

Conceitos Básicos da Matemática Financeira

Capital (C)

Representa o valor do dinheiro no momento atual. Este valor pode ser de um investimento, dívida ou empréstimo.

Juros (J)

Representam os valores obtidos pela remuneração de um capital. Os juros representam, por exemplo, o custo do dinheiro tomado emprestado.

Ele pode também ser obtido pelo retorno de uma aplicação ou ainda pela diferença entre o valor à vista e a prazo em uma transação comercial.

Montante (M)

Corresponde ao valor futuro, ou seja, é o capital mais os juros acrescidos ao valor.

Assim, M = C + J.

Taxa de Juros (i)

É o percentual do custo ou remuneração paga pelo uso do dinheiro. A taxa de juros está sempre associada a um certo prazo, que pode ser por exemplo ao dia, ao mês ou ao ano.

Cálculos Básicos da Matemática Financeira

Porcentagem

A porcentagem (%) significa por cento, ou seja, uma determinada parte de cada 100 partes. Como representa uma razão entre números, pode ser escrita na forma de fração ou como número decimal.

Por exemplo:

Muitas vezes utilizamos a porcentagem para indicar aumentos e descontos. Para exemplificar, vamos pensar que uma roupa que custava 120 reais está, nesse período do ano, com 50% de desconto.

Como já estamos familiarizados com esse conceito, sabemos que esse número corresponde à metade do valor inicial.

Então, essa roupa no momento está com custo final de 60 reais. Vejamos assim, como trabalhar a porcentagem:

50% pode ser escrito 50/100 (ou seja, 50 por cem)

Assim, podemos concluir que 50% equivale a ½ ou 0,5, em número decimal. Mas afinal o que isso significa?

Bem, a roupa está com 50% de desconto e, portanto, ela custa metade (½ ou 0,5) de seu valor inicial. Logo, a metade de 120 é 60.

Mas vamos pensar noutro caso, em que ela está com 23% de desconto. Para tanto, temos que calcular quanto é 23/100 de 120 reais. Lógico que por aproximação podemos fazer esse cálculo. Mas aqui a ideia não é essa.

Logo,

Transformamos o número percentual em número fracionário e multiplicamos pelo número total que queremos identificar o desconto:

23/100 . 120/1 - dividindo o 100 e 120 por 2, temos:

23/50 . 60/1 = 1380/50 = 27,6 reais

Portanto, o desconto de 23% numa roupa que custa 120 reais será de 27,6. Assim, o valor que você irá pagar é de 92,4 reais.

Agora vamos pensar no conceito de aumento, ao invés de desconto. No exemplo acima, temos que a comida subiu 30%. Para isso, vamos exemplificar que o preço do feijão que custava 8 reais teve um aumento de 30%.

Aqui, temos que saber quanto é 30% de 8 reais. Da mesma forma que fizemos acima, vamos calcular a porcentagem e, por fim, agregar o valor no preço final.

30/100 . 8/1 - dividindo o 100 e 8 por 2, temos:

30/50 . 4/1 = 120/50 = 2,4

Assim, podemos concluir que o feijão nesse caso está custando mais 2,40 reais. Ou seja, de 8 reais seu valor foi para 10,40 reais.

Variação Percentual

Outro conceito associado ao de porcentagem é o de variação percentual, ou seja, a variação das taxas percentuais de acréscimo ou decréscimo.

Exemplo:

No início do mês, o preço do quilo da carne era de 25 reais. No final do mês a carne era vendida por 28 reais o quilo.

Assim, podemos concluir que houve uma variação percentual relacionada com o aumento desse produto. Podemos constatar que o aumento foi de 3 reais. Pela razão dos valores temos:

3/25 = 0,12 = 12%

Sendo assim, podemos concluir que a variação percentual do preço da carne foi de 12%.

Juros

O cálculo de juros pode ser simples ou composto. No regime de capitalização simples, a correção é feita sempre sobre o valor do capital inicial.

Já nos juros compostos, a taxa de juros é aplicada sempre sobre o montante do período anterior. Note que esse último é muito utilizado nas transações comerciais e financeiras.

Juros Simples

Os juros simples são calculados levando em consideração um determinado período. Ele é calculado pela fórmula:

$$\mathbf{J = C \cdot i \cdot n}$$

Onde:

C: capital aplicado

i: taxa de juros

n: período que corresponde os juros

Logo, o montante dessa aplicação será:

$$M = C + J$$

$$M = C + C \cdot i \cdot n$$

$$\mathbf{M = C \cdot (1 + i \cdot n)}$$

Juros Compostos

O sistema de juros compostos é chamado de capitalização acumulada, pois, ao final de cada período os juros que incidem sobre o capital inicial são incorporados.

Para calcular o montante em uma capitalização a juros compostos, usamos a seguinte fórmula:

$$\mathbf{M_n = C\,(1+i)^n}$$

2- PRINCIPAIS FUNÇÕES DA HP-12C

Computações de percentual

Os cálculos de percentual fornecem o resultado da aplicação de uma taxa, expressa em partes de cem (por cento) a um valor base. Uma expressão genérica para um cálculo de percentual é exibido na Figura 1:

Figura : Expressão para um cálculo de percentual

$$x = \frac{b \times a}{100}$$

onde:

'a' é a taxa, expressa em partes de uma centena (percentuais);

'b' é o valor base;

'x' expressa o percentual da base quando a taxa é aplicada (%).

A variação percentual expressa a diferença percentual entre dois valores genéricos relativos a um dos valores. Uma expressão genérica para um cálculo de variação percentual é exibida na figura 2:

Figura : Expressão para cálculo de variação percentual

$$\Delta x = \frac{(a - b) \times 100}{b}$$

onde:

'a' é o valor de referência;

'b' é o valor base (b ≠ 0);

'Δx' expressa a variação percentual de 'b' a 'a' (Δ%).

O percentual do total expressa uma porcentagem que se relaciona a dois números. Geralmente um deles representa uma parte do outro. Uma expressão genérica para um por cento do total de cálculo é mostrado na Figura 3:

Figura : Expressão para o percentual do cálculo total

$$xT = 100 \times \frac{a}{b}$$

onde:

'a' é a parte do total;

'b' é o valor total (b ≠ 0);

'xT' expressa a porcentagem 'a' representa o total de 'b' (% T).

Cálculos percentuais da HP 12c

A HP 12c tem três teclas para calcular percentuais: [%], [Δ%] e [%T]. Para calcular percentual, alteração de percentual ou percentual do total fornecido tanto 'a' e 'b', basta pressionar 'a' e 'b' separados por [ENTER] e pressione a tecla de percentual relacionada.

Na HP 12c, o valor base usado em percentuais (primeiro valor inserido) é sempre mantido para que possa ser usado em cálculos posteriores, como o valor líquido. Por exemplo, esta é uma sequência geral para calcular o valor líquido:

$$b\ \boxed{\text{ENTER}}\ a\ \boxed{\%}\ \left\{\begin{array}{c}\boxed{+}\\ \text{or}\\ \boxed{-}\end{array}\right.$$

Praticar com cálculos de percentual

Exemplo 1

Sr. O'Brien necessita para calcular uma taxa de 11% de imposto sobre as atividades extras de seus funcionários. O valor a ser pago para as atividades extras é de $ 1.230. Quanto é 11% de $ 1.230?

Solução

A sequência de teclas mais simples para calcular os 11% de $ 1.230 é:

Pressionamento de tecla	**Visor**
$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{0}\boxed{\text{ENTER}}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{\%}$	**Figura : Calcular o valor de 11% dos 1.230 dólares** 

Resposta

11% dos 1.230 dólares são 135,30 dólares.

Exemplo 2

Agora que o Sr. O'Brien tem a taxa de 11% imposto calculado, que é o montante líquido após a adição de 11%, para 1.230 dólares? Suponha que este é realizado imediatamente após Exemplo 1.

Solução

Basta pressionar [+] porque tanto a base e o percentual (no visor) ainda estão disponíveis.

Figura : Calcular o valor líquido

Resposta

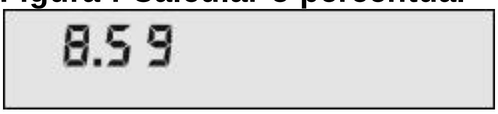
O valor líquido é de $ 1.365,30.

Exemplo 3

Dado que as despesas totais do Sr. O'Brien's sejam $ 15.890, qual é o percentual que representa $ 1.365,30 nesse total? Suponha que isso seja executado imediatamente após o Exemplo 2.

Solução

A sequência de teclas mais simples para calcular esse percentual é:

Pressionamento de tecla	Visor
[1] [5] [8] [9] [0] [x≷y] [%T]	**Figura : Calcular o percentual** 

Resposta

$ 1.365,30 representa 8,59% de $ 15.890.

Exemplo 4

Para convencer um possível cliente a comprar um novo aparelho de som, o vendedor lhe oferece um desconto de 5,5% sobre o preço. Dado que o preço do aparelho de som é $ 480, quanto o cliente vai pagar por ele?

Solução

A sequência de teclas abaixo pode ser usada para calcular o preço final:

Pressionamento de tecla	**Visor**
	**Figura : Calculando o valor final** 

Resposta

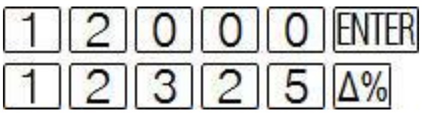
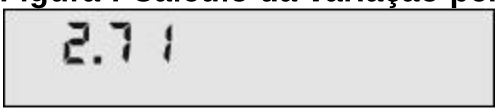
Se concordar, o cliente pagará $ 453,60.

Exemplo 5

O saldo final de uma conta poupança depois de seis meses é de $ 12.325. Sabendo que começou com US $ 12.000, qual a variação percentual observada nessa conta?

Solução

A sequência de teclas para calcular a variação percentual é:

Pressionamento de tecla	**Visor**
	**Figura : Cálculo da variação percentual** 

Resposta

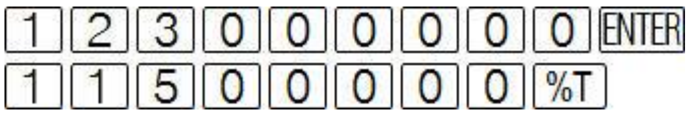
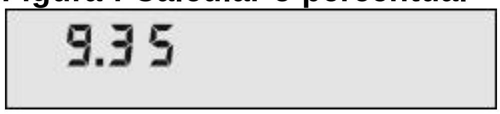
2,71% Isso significa que $ 12.350 são 2,71% mais que $ 12.000.

Exemplo 6

Uma grande empresa teve vendas de $ 123.000.000 no ano passado. Tendo em conta que uma de suas maiores filiais contribuiu para esse total com vendas de $ 11.500.000, qual é o percentual que representa sua contribuição ao total?

Solução

Este é um cálculo clássico de percentual e a sequência de teclas abaixo pode ser usada para calculá-la:

Pressionamento de tecla	**Visor**
	**Figura : Calcular o percentual** 

Resposta

$ 11.500.000 representam 9,35% de R $ 123.000.000 (o total).

3- JUROS SIMPLES

Juros simples é uma remuneração dada a alguém pela aplicação de seu capital em um determinando período. Esse regime de juros é calculado aplicando uma taxa em relação ao capital aplicado inicialmente.

É muito utilizado do dia a dia quando emprestamos dinheiro a outra pessoa, por exemplo.

Ao emprestarmos queremos receber uma quantia a mais pelo empréstimo e isso nada mais é do que uma vantagem que queremos pelo empréstimo. Uma espécie de: *te empresto, mas quero que me pague a mais por isso*.

A pessoa que empresta a outra certa quantia, recebe uma remuneração a mais além do valor emprestado, e isso é o que denomina **juros**.

Devemos aplicá-lo a uma transação considerando essas quatros variáveis:

1. ***Capital:*** é o valor aplicado;
2. ***Juros:*** é o acréscimo que recebe pelo valor aplicado;
3. ***Tempo:*** o tempo que é dado para receber o valor aplicado de volta mais os juros;
4. ***Taxa:*** taxa aplicada, em porcentagem, que determina a quantidade de juros incidente sobre o capital inicial.

Para efeito de cálculo, os juros são diretamente proporcionais ao capital, ao tempo e a taxa.

Fórmula

Vamos estabelecer que o capital será representado pela letra ***C***, maiúscula, o tempo pela letra ***t***, minúscula, a taxa por ***i***, também minúscula, e os juros pela letra ***J***, maiúscula. Assim, temos a seguinte fórmula:

$$J = C \times i \times t$$

Quando aplicamos esta fórmula, devemos ficar atentos aos seguintes casos:

- Se a taxa for ao ano, o tempo deve ser reduzido à unidade de ano;
- Caso seja ao mês, o tempo deve ser reduzido à unidade de mês;
- Se a taxa for ao dia, o tempo deve ser reduzido à unidade de dia.

Observações:

- A taxa ***i*** deve ser colocada na forma decimal.
  - **Exemplo**: se a taxa for **5%**, então **i = 0,05**, que é a divisão de 5 por 100.
- A taxa e o tempo devem está nas mesmas unidades.
  - **Exemplo**: se a taxa for **3%** ao mês, o tempo também deve ser representado em meses. Dessa forma, se o tempo estiver em ano, converta-o em meses.

Montante

Chamamos de montante, e é representado pela letra maiúscula **M**, a soma do capital inicial mais os juros obtidos na aplicação. Ou seja, quando uma pessoa que aplica um valor, e depois faz o resgate desse valor aplicado mais os juros recebidos, esse é o montante.

Fórmula para o cálculo do Montante

Para determinarmos o montante, utilizamos a seguinte fórmula:

$$M = C + J$$

Onde:

- **M** é o montante;
- **C** é o capital aplicado;

- **J** são os juros aplicados, definido pela primeira fórmula acima.

Observe que os juros são calculados pela fórmula abaixo:

$$J = C \times i \times t$$

Então, substituindo a fórmula acima na fórmula do montante **M**, temos:

$$M = C + J \Rightarrow$$

$$M = C + (C \times i \times t) \Rightarrow$$

$$M = C \times (1 + i \times t)$$

Portanto, temos que o montante também pode ser calculado pela fórmula:

$$M = C \times (1 + i \times t)$$

Juros Compostos

Além dos juros estudados nesse artigo, temos também uma outra forma de calcular juros que são os juros compostos.

Este tipo de correção financeira é usada com frequência nas instituições financeiras, pois oferecem uma melhor rentabilidade.

Os juros compostos são aplicados no capital inicial mais os juros dos meses anteriores, isto é, a partir do segundo mês a rentabilidade é calculada sobre o capital inicial mais os juros dos meses anteriores.

4- MONTANTE E VALOR ATUAL

O Montante, também conhecido como Valor Acumulado, é um dos conceitos básicos da matemática financeira. Dedica-se a estudar e controlar a variação sofrida por uma quantia investida ao longo do tempo.

Em outras palavras, é através deste cálculo que contabilizamos os ganhos (retornos de investimento) de uma pessoa física ou jurídica e os juros (simples ou composto) produzidos sobre essa quantia.

O montante é importante pois permite ter melhor planejamento financeiro (trabalhando com relatórios, históricos e, então, previsões) para evitar o pagamento de juro abusivo. Para isso, precisamos saber como é desenvolvido seu cálculo.

Para calcular o montante é fundamental compreender os demais elementos que compõem sua fórmula, sendo eles o capital e os juros.

Nesse contexto, capital é o nome que damos para todo o valor aplicado sobre algo, seja um investimento (capital produtivo) ou o valor total em uma conta bancária, por exemplo (capital bancário).

Os juros, por sua vez, é um percentual “multiplicador” do valor do capital em questão, que se converte em remuneração.

Ao todo, existem dois tipos de juros: os juros simples e os juros compostos.

Os juros simples são um tipo de juros que se aplica linearmente sobre o investimento. Ou seja, existe um percentual pré-definido que será cobrado/ganhado dentro de um período e que se aplica apenas sobre o capital inicialmente investido.

Esse tipo de juros é aplicado, por exemplo, em empréstimos. Vale ressaltar que ele deve ser de conhecimento de ambas as partes envolvidas na aplicação desde o início do processo.

Veja como é feito o seu cálculo:

- Juros simples = Capital x taxa de juros x tempo de aplicação
- Juros simples = 2000 x 0,10 x 2
- Juros simples = 400.

No exemplo consideramos: um empréstimo de 2 mil reais, 10% de juros ao ano e 2 anos de empréstimo, sendo então R$400,00 o valor final do juros.

O Juro composto, por sua vez, é conhecido também como o famoso "juros sobre juros" e bastante aplicado por instituições financeiras, já que gera maiores rendimento.

Ele se mantém em crescimento exponencial, sempre adicionando um percentual sobre o valor do capital inicialmente investido e sobre os juros acumulados conforme o passar do tempo.

Um exemplo bastante comum de sua presença é nas faturas de cartões de crédito. Quando são deixadas em atraso, uma taxa de X% ao dia é adicionada ao valor acumulado da dívida.

Os juros compostos são o tipo de juros calculado no montante e você verá sua fórmula no tópico a seguir.

Como calcular o montante?

Para calcular o Montante, que leva em consideração os juros sobre juros, você deve considerar a seguinte fórmula:

M = C (1+ i)^n

Onde:

- M é o montante
- C é o Capital Inicial

- i é a taxa de juros (em valor decimal)
- n é o número de períodos que o capital ficou aplicado

Para entender melhor a aplicação, veja os dois exemplos que preparamos:

Exemplo 1

Se você possui uma pendência no valor de 2 mil reais, com uma taxa de juros de 10% por semana, em um mês você terá a seguinte fórmula:

M = 2.000.(1+ 0,10)^4

M = 2.000.(1,46)

M = 2.928,20

Logo, o total em aberto corresponde a um montante de R$2.929,20, sendo R$ 929,20 o total pago em juros.

Exemplo 2

Você possui uma despesa mensal de R$60 com a conta de sua linha telefônica. Cada dia de atraso tem o total de 3% de juros. Uma semana depois da data de vencimento, o montante será de:

M = 60.(1+0,03)^7

M = 60.(1,23)

M = 73,79

Logo, o total em aberto corresponde a um montante de R$73,79, sendo R$ 13,79 o total pago em juros.

5- CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA OU EXPONENCIAL

No regime de capitalização composta, os juros produzidos num período serão acrescidos ao valor aplicado e no próximo período também produzirão juros, formando o chamado “juros sobre juros”. A capitalização composta caracteriza-se por uma função exponencial, em que o capital cresce de forma geométrica. O intervalo após o qual os juros serão acrescidos ao capital é denominado “período de capitalização”; logo, se a capitalização for mensal, significa que a cada mês os juros são incorporados ao capital para formar nova base de cálculo do período seguinte. É fundamental, portanto, que em regime de capitalização composta se utilize a chamada “taxa equivalente”, devendo sempre a taxa estar expressa para o período de capitalização, sendo que o “n” (número de períodos) represente sempre o número de períodos de capitalização

Em economia inflacionária ou em economia de juros elevados, é recomendada a aplicação de capitalização composta, pois a aplicação de capitalização simples poderá produzir distorções significativas principalmente em aplicações de médio e longo prazo, e em economia com altos índices de inflação produz distorções mesmo em aplicações de curto prazo. (KUHNEN, 2008).

2.1 Juros Compostos

O regime de juros compostos é o mais comum no sistema financeiro e, portanto, o mais útil para cálculos de problemas do dia-a-dia. Os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte. Matematicamente, o cálculo a juros compostos é conhecido por cálculo exponencial de juros. (BRANCO, 2002).

2.1.1 Fórmulas

Calculo do valor do juro em capitalização composta

$$J = PV \cdot \left((1+i)^n - 1\right)$$

ou

$$J = FV \cdot \left(1 - (1+i)^{-n}\right)$$

Cálculo do valor futuro em capitalização composta

$$FV = PV \cdot (1+i)^n$$

Cálculo do valor presente em capitalização composta

$$PV = FV \cdot (1+i)^{-n}$$

ou

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$$

Cálculo da taxa de juros em capitalização composta

$$i = \left(\frac{FV}{PV}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} - 1$$

Cálculo do período de aplicação em capitalização composta

$$n = \frac{LN\left(\frac{FV}{PV}\right)}{LN(1+i)}$$

ou

$$n = \frac{LOG\left(\frac{FV}{PV}\right)}{LOG(1+i)}$$

Glossário:

LN = Logaritmo Neperiano.

LOG = Logaritmo Decimal.

2.1.2 Exemplos

1) (TOSI, 2002). Quanto uma pessoa deve aplicar hoje, para ter acumulado um montante de R$ 100.000,00 daqui a 12 meses, a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês?

Solução:

$$PV = FV \cdot (1+i)^{-n}$$
$$PV = 100.000 \cdot (1+0{,}02)^{-12}$$
$$PV = 100.000 \cdot (1{,}02)^{-12}$$
$$PV = 100.000 \cdot 0788493$$
$$PV = R\$78.849{,}30$$

ou

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^{n}}$$
$$PV = \frac{100.000}{(1+0{,}02)^{12}}$$
$$PV = \frac{100.000}{(1{,}02)^{12}}$$
$$PV = \frac{100.000}{1{,}268242}$$
$$PV = R\$78.849{,}30$$

2) (TOSI, 2002). Qual o valor de resgate relativo à aplicação de um capital de R$ 500.000,00, por 18 meses, à taxa de juros compostos de 10% ao mês?

Solução:

$$FV = PV \cdot (1+i)^n$$
$$FV = 500.000 \cdot (1+0,10)^{18}$$
$$FV = 500.000 \cdot (1,10)^{18}$$
$$FV = 500.000 \cdot 5,559917$$
$$FV = R\$2.779.958,66$$

3) (HAZZAN, 2007). Um capital de R$ 2.500,00 foi aplicado a juros compostos durante quatro meses, produzindo um montante de R$ 3.500,00. Qual a taxa mensal de juros?

Solução:

$$i = \left(\frac{FV}{PV}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} - 1$$
$$i = \left(\frac{3.500}{2.500}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)} - 1$$
$$i = (1,4)^{(0,25)} - 1$$
$$i = (1,4)^{(0,25)} - 1$$
$$i = 1,087757 - 1$$
$$i = 0,087757 \text{a.m.}$$
$$i = 8,78\% \text{a.m.}$$

4) (HAZZAN, 2007). Durante quanto tempo um capital de R$ 1.000,00 deve ser aplicado a juros compostos à taxa de 10% a.a. para resultar em um montante de R$ 1.610,51?

Solução:

$$n = \frac{LN\left(\frac{1.610,51}{1.000,00}\right)}{LN(1+0,10)}$$
$$n = \frac{LN(1,61051)}{LN(1,10)}$$
$$n = \frac{0,476551}{0,095310}$$
$$n = 5 \text{ anos}$$

5) (KUHNEN, 2001). Determinar os juros produzidos por um capital de R$ 1.000,00, aplicado a juros compostos de 10% ao semestre, capitalizado semestralmente, durante 1 ano e seis meses.

Solução:

$$J = PV \cdot \left((1+i)^n - 1\right)$$
$$J = 1.000 \cdot \left((1+0,10)^3 - 1\right)$$
$$J = 1.000 \cdot \left((1,10)^3 - 1\right)$$
$$J = 1.000 \cdot (1,331 - 1)$$
$$J = 1.000 \cdot (0,331)$$
$$J = R\$331,00$$

1.2 Convenção Linear e Convenção Exponencial

A convenção linear admite a formação de juros compostos para a parte inteira do prazo e de juros simples para a parte fracionária. Esta convenção é, em essência, uma mistura de regime composto e linear, adotando fórmulas de juros compostos na parte inteira do período e uma formação de juros simples na parte fracionária.

Já a convenção exponencial adota o mesmo regime de capitalização para todo o período. Ou seja, utiliza capitalização composta tanto para a parte inteira como para a fracionária.

Esta convenção é mais generalizadamente usada na prática, sendo considerada tecnicamente mais correta por empregar somente juros compostos e taxas equivalentes para os períodos não inteiros. (ASSAF NETO, 2001)

1.2.1 Fórmulas

Cálculo do montante pela convenção Linear

$$FV = PV \cdot (1+i)^n \cdot \left(1 + \frac{p}{q} \cdot i\right)$$

$$\text{Sendo: } \frac{p}{q} = \text{Parte Fracionária do Prazo.}$$

Cálculo do montante pela convenção Exponencial

$$FV = PV \cdot (1+i)^{n+\frac{p}{q}}$$

$$\text{Sendo: } \frac{p}{q} = \text{Parte Fracionária do Prazo.}$$

1.2.2 Exemplo

1) (HAZZAN, 2007) Um capital de R$ 1.000,00 foi aplicado a juros compostos, durante três meses e meio, a taxa de 8% a.m.

a) Qual o montante pela convenção exponencial?

b) Qual o montante pela convenção linear?

Solução:

a)

$$FV = PV \cdot (1+i)^{n+\frac{p}{q}}$$
$$FV = 1.000,00 \cdot (1+0,08)^{3+\frac{15}{30}}$$
$$FV = 1.000,00 \cdot (1,08)^{3,5}$$
$$FV = 1.000,00 \cdot 1,309131$$
$$FV = R\$1.309,13$$

b)

$$FV = PV \cdot (1+i)^{n} \cdot \left(1+\frac{p}{q} \cdot i\right)$$
$$FV = 1.000,00 \cdot (1+0,08)^{3} \cdot \left(1+\frac{15}{30} \cdot 0,08\right)$$
$$FV = 1.000,00 \cdot (1,08)^{3} \cdot (1+0,50 \cdot 0,08)$$
$$FV = 1.000,00 \cdot 1,259712 \cdot 1,04$$
$$FV = R\$1.310,10$$

1.3 Taxas Equivalentes

Duas taxas são consideradas equivalentes, a juros compostos, se aplicadas sobre um mesmo capital, por um período equivalente de tempo, gerando montantes iguais. (SHINODA, 1998)

No sistema de capitalização composta, ao contrario do que acontece no sistema de capitalização simples, duas taxas equivalentes não são necessariamente proporcionais entre si.

Daí a necessidade de obtermos uma relação que nos permita calcular a taxa equivalente, num certo período de tempo, a uma dada taxa de juro composto. (PARENTE, 1996).

1.3.1 Fórmula.

$$i_2 = (1+i_1)^{(n_2/n_1)} - 1$$

Sendo :

i_1 = Taxa conhecida

i_2 = Taxa desconhecida ou procurada

n_1 = Período relativo à taxa conhecida

n_2 = Período relativo à taxa desconhecida ou procurada

1.3.2 Exemplos

1) (TOSI, 2002) Qual a taxa anual equivalente a 5% ao mês?

Solução:

$$i_2 = (1+i_1)^{(n_2/n_1)} - 1$$
$$i_2 = (1+0{,}05)^{(12/1)} - 1$$
$$i_2 = (1{,}05)^{12} - 1$$
$$i_2 = 1{,}795856 - 1$$
$$i_2 = 0{,}795856$$
$$i_2 = 79{,}59\%\text{a.a.}$$

2) (TOSI, 2002) Qual a taxa mensal equivalente a 200% ao ano?

Solução:

$$i_2 = (1+i_1)^{(n_2/n_1)} - 1$$
$$i_2 = (1+2)^{(1/12)} - 1$$
$$i_2 = (3)^{0{,}083333} - 1$$
$$i_2 = 1{,}095872 - 1$$
$$i_2 = 0{,}095872$$
$$i_2 = 9{,}59\%\text{a.m.}$$

1.4 Taxa Nominal ou Aparente e Taxa Efetiva

Existem algumas situações em que a taxa utilizada na operação não coincide com o período de capitalização. Por exemplo, aplica-se R$ 1.000,00 a juros compostos por três meses à taxa de 70% ao ano, capitalizados mensalmente. Note que, apesar da taxa ser expressa em termos anuais, a capitalização se dá em termos mensais. Isto implica estarmos utilizando uma taxa nominal anual quando, efetivamente, a remuneração do capital se dá em termos mensais. Para tanto, faz-se necessária a distinção entre taxa nominal e taxa efetiva.

Taxa nominal: é aquela cuja unidade do período a que se refere não coincide com a unidade do período de capitalização.

Taxa Efetiva: é aquela que efetivamente grava uma operação financeira.

Dada uma taxa de juros nominal procede-se, para o cálculo da respectiva taxa de juros efetiva, por convenção, de maneira igual a do sistema de capitalização simples, isto é, calcula-se a taxa proporcional à dada, relativa à unidade de tempo mencionada para a capitalização, e, posteriormente, apura-se exponencialmente a taxa efetiva à nominal. (TEIXEIRA, 1998).

1.4.1 Fórmula

Cálculo da taxa Efetiva

$$i_f = \left(1 + \frac{i}{K}\right)^K - 1$$

Sendo :

$i =$ Taxa nominal

$i_f =$ Taxa efetiva

$K =$ Número de capitaliza ções para um período da taxa nominal

1.4.2 Exemplo

1) (PARENTE, 1996) Qual a taxa efetiva relativa à taxa nominal de 24% a.a., capitalizada mensalmente?

Solução:

$$i_K = \frac{i}{K}$$

$$iK = \frac{24}{12}$$

$$iK = 2\% \text{a.m.}$$

2) Uma taxa nominal de 24% a.a. é capitalizada trimestralmente. Calcule a taxa efetiva anual.

Solução:

$$i_f = \left(1+\frac{i}{K}\right)^K - 1$$

$$i_f = \left(1+\frac{0,24}{4}\right)^4 - 1$$

$$i_f = (1+0,06)^4 - 1$$

$$i_f = (1,06)^4 - 1$$

$$i_f = 1,262477 - 1$$

$$i_f = 0,262477$$

$$i_f = 26,25\% \text{a.a.}$$

1.5 Descontos Compostos

Desconto composto é aquele em que a taxa de desconto incide sobre o montante ou valor futuro, deduzido dos descontos acumulados até o período imediatamente anterior. É obtido em função de cálculo exponenciais e praticamente não é utilizado em nenhum país do mundo. Raramente se toma conhecimento de um caso em que esse critério tenha sido aplicado. Tem importância meramente teórica.

No caso de desconto simples, a taxa de desconto incide somente sobre o valor futuro dos títulos, tantas vezes quantos forem os períodos unitários.

Já no caso do desconto composto, para n períodos unitários, a taxa de desconto incide, no primeiro período, sobre o valor futuro do título; no segundo período, sobre o valor futuro do título menos o valor do desconto correspondente ao primeiro período; no terceiro período, sobre o valor futuro do título menos os valores dos descontos referentes ao primeiro e ao segundo período, e assim sucessivamente até o enésimo período. (VIEIRA SOBRINHO, 2000).

1.5.1 Desconto Composto Comercial (bancário) ou por fora

O desconto composto "por fora" caracteriza-se pela incidência sucessiva da taxa de desconto sobre o valor nominal do título, o qual é deduzido, em cada período, dos descontos obtidos em períodos anteriores. (ASSAF NETO, 2001)

1.5.2 Desconto Composto Racional ou por dentro

O desconto composto "por dentro" (ou racional) é aquele estabelecido segundo as conhecidas relações do regime de juros compostos.
Assim sendo, o desconto composto racional é a diferença entre o valor nominal e o valor atual de um título, quitado antes do vencimento. (ASSAF NETO, 2001)

1.5.3 Fórmulas

Cálculo do desconto composto racional ou por dentro

$$D_r = FV \cdot \left[1-(1+i)^{-n}\right]$$

Cálculo do desconto composto comercial (bancário) ou por fora

$$D_c = FV \cdot \left[1-(1-i)^{n}\right]$$

Cálculo do valor atual de um título a desconto por dentro

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$$

ou

$$PV = FV - D_r$$

Cálculo de valor atual de um título a desconto por fora

$$PV = FV \cdot (1-i)^n$$

Cálculo de valor nominal de um título a desconto por fora

$$FV = \frac{PV}{(1-i)^n}$$

Cálculo de valor nominal de um título a desconto por dentro

$$FV = PV \cdot (1+i)^n$$

1.5.4 Exemplos

1) (KUHNEN, 2001) Calcular o valor atual de um título de R$ 20.000,00 descontado um ano antes do vencimento à taxa de desconto bancário composto de 5% ao trimestre, capitalizável trimestralmente.

Solução:

$$PV = FV \cdot (1-i)^n$$

$$PV = 20.000{,}00 \cdot (1-0{,}05)^{12/3}$$

$$PV = 20.000{,}00 \cdot (0{,}95)^4$$

$$PV = 20.000{,}00 \cdot 0{,}814506$$

$$PV = R\$16.290{,}13$$

2) (KUHNEN, 2001) Qual é o valor nominal de um título que foi resgatado 1 ano antes de seu vencimento por R$ 16.290,13, à taxa de desconto bancário composto de 5% ao trimestre?

Solução:

$$FV = \frac{PV}{(1-i)^n}$$

$$FV = \frac{16.290,13}{(1-0,05)^{12/3}}$$

$$FV = \frac{16.290,13}{(0,95)^4}$$

$$FV = \frac{16.290,13}{0,814506}$$

$$FV = R\$20.000,01$$

3) (PARENTE, 1996) Obter o desconto comercial composto, concedido no resgate de um título de R$ 50.000,00, 2 meses antes de seu vencimento, à taxa de 3% a.m.

Solução:

$$D_c = FV \cdot \left[1-(1-i)^n\right]$$

$$D_c = 50.000,00 \cdot \left[1-(1-0,03)^2\right]$$

$$D_c = 50.000,00 \cdot 0,0591$$

$$D_c = R\$2.955,00$$

4) (PARENTE, 1996) Encontrar o desconto racional composto, concedido no resgate de um título de R$ 50.000,00, 2 meses antes de seu vencimento, à taxa de 3% a.m.

Solução:

$$D_r = FV \cdot \left[1-(1+i)^{-n}\right]$$
$$D_r = 50.000,00 \cdot \left[1-(1+0,03)^{-2}\right]$$
$$D_r = 50.000,00 \cdot \left[1-(1,03)^{-2}\right]$$
$$D_r = 50.000,00 \cdot \left[1-0,942596\right]$$
$$D_r = 50.000,00 \cdot 0,057404$$
$$D_r = R\$2.870,20$$

5) (KUHNEN, 2001) Qual é o valor do título que, descontado 3 meses antes de seu vencimento, a uma taxa de 10% a.m., determinou um valor de resgate de R$ 12.400,00?

Solução:

$$FV = PV \cdot (1+i)^n$$
$$FV = 12.400,00 \cdot (1+0,10)^3$$
$$FV = 12.400,00 \cdot (1,10)^3$$
$$FV = 12.400,00 \cdot 1,331$$
$$FV = R\$16.504,40$$

6) (PARENTE, 1996) Qual o valor atual de um título de R$ 100.000,00, resgatado racionalmente à taxa composta de 4%a.m., 3 meses antes de seu vencimento?

Solução:

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$$
$$PV = \frac{100.000,00}{(1+0,04)^3}$$
$$PV = \frac{100.000,00}{(1,04)^3}$$
$$PV = \frac{100.000,00}{1,124864}$$
$$PV = R\$88.899,64$$

1.6 Equivalência de Capitais a Juros Compostos

Já trabalhamos com os conceitos envolvendo equivalência de capitais, no sistema de capitalização simples. Estudaremos agora esses mesmos conceitos, mas sob outro enfoque: o do sistema de capitalização composta. É claro que os conceitos e a maneira de encararmos os problemas serão os mesmos. Mudaremos apenas o regime de capitalização e o fato de que a escolha da data focal no sistema composto é irrelevante. (PARENTE, 1996)

1.6.1 Fórmulas

Para vencimentos anteriores a data focal

$$FV = PV \cdot (1+i)^n$$

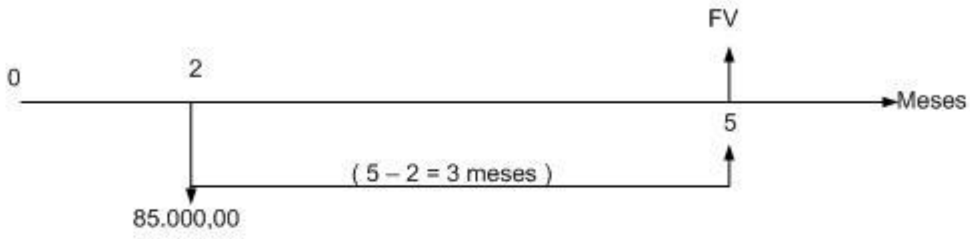
Para vencimentos posteriores a data focal

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$$

1.6.2 Exemplo

1) (PARENTE, 1996) Uma pessoa deseja substituir um título de valor nominal de R$ 85.000,00, com vencimento daqui a 2 meses, por outro título, com vencimento para 5 meses. Qual o valor nominal do novo título, sabendo-se que o banco em questão adota, nesse tipo de operação, a taxa composta de 9% a.m. e o critério do desconto racional?

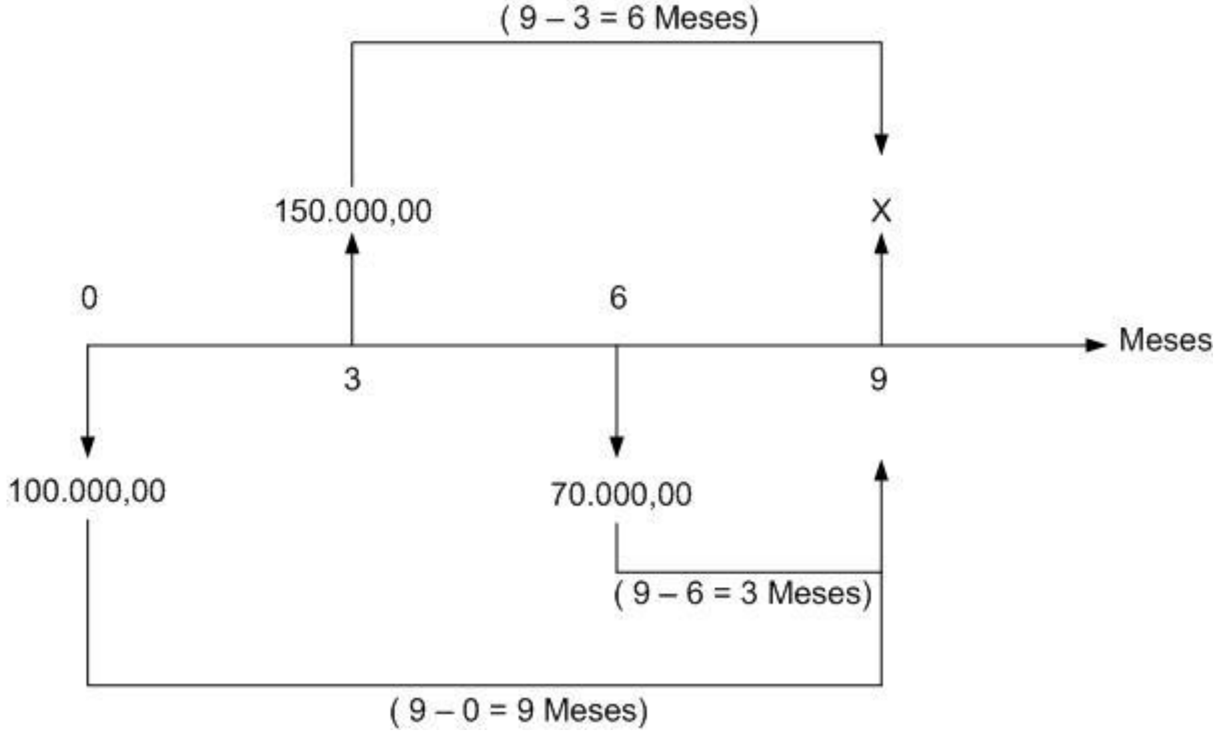
Solução:



$$FV = PV \cdot (1+i)^n$$
$$FV = 85.000,00 \cdot (1+0,09)^3$$
$$FV = 85.000,00 \cdot (1,09)^3$$
$$FV = 85.000,00 \cdot 1,295029$$
$$FV = R\$110.077,47$$

2) (PARENTE, 1996) Uma pessoa deve, em um banco, dois títulos: R$ 100.000,00 para pagamento imediato e R$ 70.000,00 para pagamento em 6 meses. Por lhe ser conveniente, o devedor propõe ao banco a substituição da dívida por um pagamento de R$ 150.000,00 em 3 meses e o saldo restante em 9 meses. Qual o valor do saldo restante se o banco realiza essa operação a 10% a.m., sob o critério de desconto racional composto?

Solução:


(9 – 3 = 6 Meses)
150.000,00
X
0
6
Meses
3
9
100.000,00
70.000,00
(9 – 6 = 3 Meses)
(9 – 0 = 9 Meses)

$$FV = PV \cdot (1+i)^n$$
$$FV_1 = 100.000,00 \cdot (1+0,10)^9$$
$$FV_1 = 100.000,00 \cdot (1,10)^9$$
$$FV_1 = 100.000,00 \cdot 2,357948$$
$$FV_1 = 235.794,77$$

$$FV = PV \cdot (1+i)^n$$
$$FV_2 = 70.000,00 \cdot (1+0,10)^3$$
$$FV_2 = 70.000,00 \cdot (1,10)^3$$
$$FV_2 = 70.000,00 \cdot 1,331$$
$$FV_2 = 93.170,00$$

$$FV = PV \cdot (1+i)^n$$
$$FV_3 = 150.000,00 \cdot (1+0,10)^6$$
$$FV_3 = 150.000,00 \cdot (1,10)^6$$
$$FV_3 = 150.000,00 \cdot 1,771561$$
$$FV_3 = 265.734,15$$

O Valor procurado pode ser obtido na equação :

$$X + FV_3 = FV_1 + FV_2$$
$$X + 265.734,15 = 235.794,77 + 93.170,00$$
$$X + 265.734,15 = 328.964,77$$
$$X = 328.964,77 - 265.734,15$$
$$X = R\$63.230,62$$

6- TAXAS EQUIVALENTES

Duas taxas i_1 e i_2 são equivalentes se, aplicadas ao mesmo capital **P** durante o mesmo período de tempo, através de diferentes períodos de capitalização, produzem o mesmo montante final.

- Seja o capital **P** aplicado por um ano a uma taxa anual i_a.
- O montante **M** ao final do período de 1 ano será igual a $M = P(1 + i_a)$
- Consideremos agora o mesmo capital **P** aplicado por 12 meses a uma taxa mensal i_m.
- O montante **M'** ao final do período de 12 meses será igual a $M' = P(1 + i_m)^{12}$.

Pela definição de taxas equivalentes vista acima, deveremos ter **M = M'**.

Portanto, $P(1 + i_a) = P(1 + i_m)^{12}$
Daí concluímos que $\mathbf{1 + i_a = (1 + i_m)^{12}}$

Com esta fórmula podemos calcular a taxa anual equivalente a uma taxa mensal conhecida.

Exemplos:

1) Qual a taxa anual equivalente a 8% ao semestre?

Em um ano temos dois semestres, então teremos: $1 + i_a = (1 + i_s)^2$
$1 + i_a = 1,08^2$
$i_a = 0,1664 = 16,64\%$ a.a.

2) Qual a taxa anual equivalente a 0,5% ao mês?

$1 + i_a = (1 + i_m)^{12}$
$1 + i_a = (1,005)^{12}$
$i_a = 0,0617 = 6,17\%$ a.a.

7- O VALOR DO DINHEIRO NO TEMPO

O valor do dinheiro no tempo é um conceito financeiro que sustenta que o dinheiro no presente vale mais do que o mesmo dinheiro a ser recebida no futuro.

O **valor do dinheiro no tempo** é um conceito financeiro básico que sustenta que o **dinheiro no presente vale mais do que a mesma soma de dinheiro a ser recebida no futuro**.
Isto é verdade porque o dinheiro que você tem agora pode ser investido e ganhar um retorno, criando assim uma quantidade maior de dinheiro no futuro.

Além disso, com dinheiro futuro, existe o risco adicional de que o dinheiro nunca possa ser realmente recebido, por uma razão ou outra.

O valor do dinheiro no tempo é algumas vezes referido como o valor presente líquido (VPL) do dinheiro, uma métrica muito utilizada para comparar investimentos.

Você pode entender melhor o que é isso lendo: O que é VPL e o que esse valor representa para o seu investimento?
Mas vamos voltar a falar sobre o valor do dinheiro no tempo…

Como funciona o valor do dinheiro no tempo?

Um exemplo simples pode ser usado para mostrar o valor do dinheiro no tempo.

Suponha que alguém se ofereça para te pagar um determinado serviço de uma das duas maneiras: eles pagarão a você R$ 1.000 agora ou R1.100 daqui a um ano.

Qual opção de pagamento você deve escolher? Depende de que tipo de retorno de investimento você pode ganhar com o dinheiro no momento atual.

Como R$ 1.100 é 110% de R$ 1.000, então se você acredita que pode fazer mais do que um retorno de 10% sobre o dinheiro investindo-o no próximo ano, você deve optar por receber os R$ 1.000 agora.

Por outro lado, se você não acha que poderia ganhar mais de 9% no próximo ano investindo o dinheiro, então você deve fazer o pagamento futuro de R$ 1.100 — contanto que você confie que a pessoa lhe pague, claro.

Valor do Tempo e Poder de Compra

O valor do dinheiro no tempo também está relacionado aos conceitos de **inflação** e **poder de compra**.
Ambos os fatores precisam ser levados em consideração, juntamente com qualquer taxa de retorno que possa ser obtida com o investimento do dinheiro.

Por que isso é importante? Porque a inflação constantemente corrói o valor e, portanto, o poder de compra do dinheiro.

É melhor exemplificado pelos preços de commodities, como gás ou alimentos. Se, por exemplo, você recebesse um certificado de R$ 100,00 de gasolina gratuita em 2000, poderia ter comprado muito mais galões de gasolina do que se tivesse recebido R$ 100 de gasolina gratuita uma década depois.

A inflação e o poder de compra devem ser considerados quando você investe dinheiro, pois, para calcular o **retorno real de um investimento**, você deve subtrair a taxa de inflação de qualquer porcentagem de retorno que você recebe em seu dinheiro.
Se a taxa de inflação for realmente maior do que a taxa de retorno do seu investimento, então, mesmo que o seu investimento mostre um retorno nominal positivo, você está realmente perdendo dinheiro em termos de poder de compra.

Por exemplo, se você ganhar 10% em investimentos, mas a taxa de inflação é de 15%, você está realmente perdendo 5% em poder de compra a cada ano (10% - 15% = -5%).

Fórmula do valor do dinheiro no tempo

O valor do dinheiro no tempo é um conceito importante não apenas para indivíduos, mas também para tomar **decisões de negócios**.

As empresas consideram o valor do dinheiro no tempo na tomada de decisões sobre investimentos em desenvolvimento de novos produtos, aquisição de novos equipamentos ou instalações comerciais e no estabelecimento de condições de crédito para a venda de seus produtos ou serviços.

Uma fórmula específica pode ser usada para calcular o valor futuro do dinheiro para que ele possa ser comparado ao valor presente:

Onde:

- FV = valor futuro do dinheiro
- PV = valor presente
- i = taxa de juros ou outro retorno que pode ser obtido sobre o dinheiro
- n = o número de períodos compostos de juros por ano

Se quiser considerar um **período maior que 1 ano**, basta multiplicar o n pelo número de anos a considerar. Por isso, algumas fórmulas já elevam o valor a (n x t).
Usando a fórmula acima, vamos ver um exemplo em que você tem R$ 5.000 e pode esperar ganhar 5% de juros sobre essa soma a cada ano nos próximos dois anos.
Supondo que o interesse é apenas composto anualmente, o valor futuro de seus R$ 5.000 hoje pode ser calculado da seguinte forma:

FV = R$ 5.000 x (1 + (5% / 1) ^ (1 x 2) = R$ 5.512,50

Fórmula do valor presente para se chegar a um valor futuro

A fórmula também pode ser usada para calcular o **valor atual do dinheiro a ser recebido no futuro.** Você simplesmente divide o valor futuro em vez de multiplicar o valor presente.
Isso pode ser útil ao considerar dois valores presentes e futuros variáveis. Em nosso exemplo original, consideramos as opções de alguém pagando seus R$ 1.000 hoje versus R$ 1.100 daqui 1 ano.

Se você pudesse ganhar 5% investindo o dinheiro agora, e quisesse saber qual valor presente seria igual ao valor futuro de R$ 1.100 — ou quanto dinheiro você precisaria agora para ter R$ 1.100 daqui a um ano — a fórmula seria seja a seguinte:

PV = R$ 1.100 / (1 + (5% / 1) ^ (1 x 1) = R$ 1.047

O cálculo acima mostra que, com um retorno disponível de 5% ao ano, você precisaria receber R$ 1.047 no presente para igualar o valor futuro de R$ 1.100 a ser recebido daqui a um ano.

Capitalização simples é aquela em que a taxa de juros incide somente sobre o capital inicial, não incide, pois, sobre os juros acumulados. a taxa varia linearmente em função do tempo. Se quisermos converter a taxa diária em mensal, basta multiplicar a taxa diária por 30; se desejarmos uma taxa anual e tendo a mensal, basta multiplicar por 12, e assim por diante.

CALCULO DOS JUROS:

Valor dos juros é obtido da expressão: **J** = **C** x **i** x **n** onde:

j **=** valor dos juros

C **=** valor do capital inicial ou principal

i **=** taxa

n **=** prazo

M = montante final

EXEMPLO DE APLICAÇÃO:

1 - Qual o valor dos juros correspondentes a um empréstimo de R$ 10.000,00, pelo prazo de 15 meses, sabendo-se que a taxa cobrada é de 3% a m.?

Dados:

C = 10.000,00

n = 15 meses

i = 3% a m.

j = ?

solução:

j = **C** x **i** x **n**

j = 10.000,00 x 0,03 **(3/100)** x 15 = 4.500,00

2 **-** Um capital de R$ 25.000,00, aplicado durante 10 meses, rende juros de R$ 5.000,00. Determinar a taxa correspondente?

C = 25.000,00

j = 5.000,00

n = 10 meses

i = ?

solução:

j = **C** x **i** x **n**

i = **J** / **C** x **n** = 5.000,00/25.000,0 x10 = 0,02 ou 2% a. m.

3 **-** Uma aplicação de R$ 50.000,00 pelo prazo de 180 dias obteve um rendimento de R$ 8.250,00. Indaga-se: Qual a taxa anual correspondente a essa aplicação?

C = 50.000,00

j = 8.250,00

n = 180 dias

i = ?

solução: **i** = **j** / **C** x **n**

i = 8.250,00 / 50.000,00 x 180 = 0,00091667, ou 0,091667% ao dia.

Taxa anual = 360 x 0,00091667 = 0,33 ou 33% a a

Observação: Quando o prazo informado for em dias, a taxa resultante dos cálculos será diária; se o prazo for em meses, a taxa será mensal; se for em trimestre, a taxa será trimestral, e assim sucessivamente.

8- SISTEMA DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

No regime de capitalização simples, os juros são calculados sempre sobre o valor inicial, não ocorrendo qualquer alteração da base de cálculo durante o período de cálculo dos juros. Na modalidade de juros simples, a base de cálculo é sempre o Valor Atual ou Valor Presente (PV), enquanto na modalidade de desconto bancário a base de cálculo é sempre o valor nominal do título (FV). O regime de capitalização simples representa, portanto, uma equação aritmética, sendo que o capital cresce de forma linear, seguindo uma reta; logo, é indiferente se os juros são pagos periodicamente ou no final do período total. O regime de capitalização simples é muito utilizado em países com baixo índice de inflação e custo real do dinheiro baixo; no entanto, em países com alto índice de inflação ou custo financeiro real elevado, a exemplo do Brasil, a utilização de capitalização simples só é recomendada para aplicações de curto prazo. A capitalização simples, porém, representa o início do estudo da matemática financeira, pois todos os estudos de matemática financeira são oriundos de capitalização simples. (KUHNEN, 2008).

1.3 Juros Simples

No regime de juros simples, os juros de cada período são sempre calculados em função do capital inicial (principal) aplicado. Os juros do período não são somados ao capital para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes. Os juros não são capitalizados e, conseqüentemente, não rendem juros. Assim, apenas o principal é que rende juros. (PUCCINI, 2004).

1.3.1Fórmulas

Valor do juro simples - J

$$J = PV \cdot i \cdot n$$

Valor do montante simples - FV

$$FV = PV \cdot (1 + i \cdot n)$$

Valor Presente – PV

$$PV = \frac{FV}{(1 + i \cdot n)}$$

Cálculo da taxa de juros simples – i

$$i = \frac{J}{(PV \cdot n)}$$

ou

$$i = \frac{(FV - PV)}{(PV \cdot n)}$$

Cálculos do período em juros simples – n

$$n = \frac{J}{(PV \cdot i)}$$

ou

$$n = \frac{(FV - PV)}{(PV \cdot i)}$$

1.3.2 Juros Simples Comerciais, ordinários ou bancários.

Nos juros simples comerciais ou ordinários, para estabelecer a conformidade entre a taxa e o período utilizam-se o ano comercial. Logo, em juros comerciais todos os meses têm 30 dias e o ano têm 360 dias, não importando o calendário civil.

1.3.3 Juros Simples Exatos

Já os juros simples exatos apóiam-se no calendário civil para calcular o número de dias entre duas datas. Sendo que o mês segue o número de dias do calendário, e o ano civil possui 365 dias ou 366 em ano bissexto.

1.3.4 Juros Simples pela regra dos banqueiros

Os bancos geralmente utilizam uma combinação entre os conceitos de juros comerciais e exatos, denominado juros pela regra dos banqueiros. Sendo que para calcular o número de dias entre duas datas, utiliza-se o conceito de juros exatos, ou seja, calendário civil, já para calcular o número total de dias de um ano ou mês, utiliza-se o conceito de juros comerciais, ou seja, um mês têm 30 dias e um ano têm 360 dias. Este conceito é geralmente empregado em transações financeiras de curto prazo.

1.3.5 Exemplos

1) (CESAR, 2000). Se R$ 3.000,00 foram aplicados por cinco meses à taxa de juros simples de 4% ao mês, determine:

a) Os juros recebidos;

b) O montante.

Solução:

a)

$$J = PV \cdot i \cdot n$$
$$J = 3.000{,}00 \cdot 0{,}04 \cdot 5$$
$$J = R\$\ 600{,}00$$

b)

$$FV = PV \cdot (1 + i \cdot n)$$
$$FV = 3.000,00 \cdot (1 + 0,04 \cdot 5)$$
$$FV = 3.000,00 \cdot (1 + 0,2)$$
$$FV = 3.000,00 \cdot 1,2$$
$$FV = R\$3.600,00$$

2) (VIEIRA SOBRINHO, 2000). Um capital de R$ 28.000,00, aplicado durante 8 meses, rendeu juros de R$ 11.200,00. Determinar a taxa anual de juros simples.

Solução:

$$i = \frac{J}{(PV \cdot n)}$$
$$i = \frac{11.200,00}{\left(28.000,00 \cdot \frac{8}{12}\right)}$$
$$i = \frac{11.200,00}{(28.000,00 \cdot 0,666667)}$$
$$i = \frac{11.200,00}{18.666,68}$$
$$i = 0,60 a.a. = 60\% a.a.$$

3) (ASSAF NETO, 2001) Se uma pessoa necessita de R$ 100.000,00 daqui a 10 meses, quanto deverá ela depositar hoje num fundo de poupança que remunera à taxa linear de 12% ao ano?

Solução:

$$PV = \frac{FV}{(1+i \cdot n)}$$
$$PV = \frac{100.000,00}{\left(1+0,12 \cdot \frac{10}{12}\right)}$$
$$PV = \frac{100.000,00}{(1+0,12 \cdot 0,833333)}$$
$$PV = \frac{100.000,00}{(1+0,10)}$$
$$PV = \frac{100.000,00}{(1,10)}$$
$$PV = \frac{100.000,00}{(1,10)}$$
$$PV = R\$90.909,09$$

4) (CRESPO, 2002) Qual o prazo para que uma aplicação de R$ 200.000,00, a taxa de juros simples de 2,5% ao mês, renda um montante de R$ 240.000,00?

Solução:

$$n = \frac{(FV - PV)}{(PV \cdot i)}$$
$$n = \frac{(240.000,00 - 200.000,00)}{(200.000,00 \cdot 0,025)}$$
$$n = \frac{(40.000,00)}{(5.000,00)}$$
$$n = 8 \text{ meses}$$

5) (KUHNEN, 2008). Calcular os juros ordinários, juros, exatos e juros pela regra dos banqueiros de um capital de R$ 100.000,00 aplicados de 15/07/2008 a 15/09/2008 em um banco que cobra juros simples de 30% ao ano.

a) Pelo juro ordinário ou comercial;

b) Pelo juro exato;

c) Pela regra dos banqueiros.

Solução:

a)

$$J = PV \cdot i \cdot n$$
$$J = 100.000{,}00 \cdot 0{,}30 \cdot \frac{60}{360}$$
$$J = 100.000{,}00 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}166667$$
$$J = R\$5.000{,}00$$

b)

$$J = PV \cdot i \cdot n$$
$$J = 100.000{,}00 \cdot 0{,}30 \cdot \frac{62}{365}$$
$$J = 100.000{,}00 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}169863$$
$$J = R\$5.095{,}89$$

c)

$$J = PV \cdot i \cdot n$$
$$J = 100.000{,}00 \cdot 0{,}30 \cdot \frac{62}{360}$$
$$J = 100.000{,}00 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}172222$$
$$J = R\$5.166{,}66$$

1.4 Taxas Proporcionais.

Para se compreender mais claramente o significado destas taxas deve-se reconhecer que toda operação envolve dois prazos: (1) o prazo a que se refere à taxa de juros; e (2) o prazo de capitalização (ocorrência) dos juros. (ASSAF NETO, 2001).

Taxas Proporcionais: Duas (ou mais) taxas de juro simples são ditas proporcionais quando seus valores e seus respectivos períodos de tempo, reduzidos a uma mesma unidade, forem uma proporção. (PARENTE, 1996).

1.4.1 Exemplos

1) (ASSAF NETO, 2001). Calcular a taxa anual proporcional a: (a) 6% ao mês; (b) 10% ao bimestre.

Solução:

a)

$i = 6\% \cdot 12 = 72\% \text{ ao ano}$

b)

$i = 10\% \cdot 6 = 60\% \text{ ao ano}$

2) (PARENTE, 1996). Encontrar as taxas de juro simples mensal, trimestral e anual, proporcionais a 2% ao dia.

Solução

$$1\,\text{mês} = 30\text{ dias} : 2\%\text{a.d.} = (2 \cdot 30)\%\text{a.m.} = 60\%\text{a.m.}$$
$$1\,\text{trimestre} = 90\text{ dias} : 2\%\text{a.d.} = (2 \cdot 90)\%\text{a.t.} = 180\%\text{a.t.}$$
$$1\,\text{ano} = 360\text{ dias} : 2\%\text{a.d.} = (2 \cdot 360)\%\text{a.a.} = 720\%\text{a.a.}$$

1.5 Desconto Simples Comercial ou Bancário (Por Fora)

Um dos modelos de juros simples mais utilizados no mercado financeiro é o chamado juro antecipado, juro adiantado, desconto de títulos ou simplesmente desconto bancário. Este é o modelo utilizado na modalidade de desconto e também por empresas de *factoring*, bem como em transações de curto prazo quando o pagamento for efetuado em uma única parcela, inclusive para cálculo de preço de venda.

Este modelo consiste em calcular o Valor Presente descontando do Valor Futuro (Valor de Face) uma parcela igual ao produto do Valor Futuro pela "taxa de juros" e pelo número de períodos até o vencimento do título negociado. (KUHNEN, 2008).

1.5.1 Fórmulas

Valor do Desconto Simples Comercial

$$D_c = FV \cdot i_a \cdot n$$

Valor Presente com Desconto Simples Comercial

$$PV_c = FV \cdot (1 - i_a \cdot n)$$

ou

$$PV_c = FV - D_c$$

Valor Futuro com Desconto Simples Comercial

$$FV = \frac{PV_c}{(1 - i_a \cdot n)}$$

ou

$$FV = PV_c + D_c$$

Número de Períodos com Desconto Simples Comercial

$$n = \frac{(FV - PV_c)}{(FV \cdot i_a)}$$

ou

$$n = \frac{D_c}{(FV \cdot i_a)}$$

Taxa de Desconto Simples Comercial

$$i = \frac{D_c}{(FV \cdot n)}$$

ou

$$i = \frac{(FV - PV)}{(FV \cdot n)}$$

1.5.2 Exemplos

1) (CRESPO, 2002). Um título de R$ 6.000,00 vai ser descontado à taxa de 2,1% ao mês. Faltando 45 dias para o vencimento do título, determine:

a) O valor do desconto comercial;

b) O valor atual comercial.

Solução:

a)

$$D_c = FV \cdot i_a \cdot n$$
$$D_c = 6.000{,}00 \cdot 0{,}021 \cdot \frac{45}{30}$$
$$D_c = 6.000{,}00 \cdot 0{,}021 \cdot 1{,}5$$
$$D_c = R\$189{,}00$$

b)

$$PV_c = FV \cdot (1 - i_a \cdot n)$$
$$PV_c = 6.000{,}00 \cdot \left(1 - 0{,}021 \cdot \frac{45}{30}\right)$$
$$PV_c = 6.000{,}00 \cdot (1 - 0{,}0315)$$
$$PV_c = 6.000{,}00 \cdot 0{,}9685$$
$$PV_c = R\$5.811{,}00$$

ou

$$PV_c = FV - D_c$$
$$PV_c = 6.000{,}00 - 189{,}00$$
$$PV_c = R\$5.811{,}00$$

2) (VIEIRA SOBRINHO, 2000). Qual a taxa mensal de desconto utilizada numa operação a 120 dias, cujo valor de resgate é de R$ 1.000,00 e cujo valor atual é de R$ 880,00?

Solução:

$$i = \frac{(FV - PV)}{(FV \cdot n)}$$

$$i = \frac{(1.000,00 - 880,00)}{\left(1.000,00 \cdot \frac{120}{30}\right)}$$

$$i = \frac{120,00}{4.000,00}$$

$$i = 0,03 \text{ ao mês} = 3\% \text{ ao mês}$$

3) (VIEIRA SOBRINHO, 2000). Uma duplicata no valor de R$ 6.800,00 é descontada por um banco, gerando um crédito de R$ 6.000,00 na conta do cliente. Sabendo-se que a taxa cobrada pelo banco é de 3,2% ao mês, determinar o prazo de vencimento da duplicata.

Solução:

$$n = \frac{(FV - PV_c)}{(FV \cdot i_a)}$$

$$n = \frac{(6.800,00 - 6.000,00)}{(6.800,00 \cdot 0,032)}$$

$$n = \frac{800,00}{217,60}$$

$$n = 3,676 \text{ meses ou } 110 \text{ dias}$$

1.6 Desconto Simples Racional (Por Dentro)

O desconto simples racional **(D_r)** também chamado de desconto por dentro ou desconto real é equivalente ao juro produzido pelo valor atual do título numa taxa fixada e durante o tempo correspondente.

Na pratica, somente o desconto comercial é utilizado; porém, é necessário fazermos um rápido estudo do desconto racional porque, o desconto composto está ligado a esse conceito. (CRESPO, 2002).

1.6.1 Fórmulas

Valor do Desconto Simples Racional

$$D_r = FV - PV$$

ou

$$D_r = PV \cdot i \cdot n$$

ou

$$D_r = \frac{(FV \cdot i \cdot n)}{(1 + i \cdot n)}$$

Valor Presente com Desconto Simples Racional

$$PV = \frac{FV}{(1 + i \cdot n)}$$

Valor Futuro com Desconto Simples Racional

$$FV = PV \cdot (1 + i \cdot n)$$

Número de Períodos com Desconto Simples Racional

$$n = \frac{\left(\frac{FV}{PV} - 1\right)}{i}$$

Taxa de Desconto Simples Racional

$$i = \frac{\left(\frac{FV}{PV} - 1\right)}{n}$$

1.6.2 Exemplos

1) (ASSAF NETO, 2001). Seja um título de valor nominal de R$ 4.000,00 vencível em um ano, que está sendo liquidado 3 meses antes de seu vencimento. Sendo de 42% a.a. a taxa nominal de juros corrente, pede-se calcular o desconto e o valor descontado desta operação.

Solução:

Desconto

$$D_r = \frac{(FV \cdot i \cdot n)}{(1 + i \cdot n)}$$

$$D_r = \frac{\left(4.000{,}00 \cdot 0{,}42 \cdot \frac{3}{12}\right)}{\left(1 + 0{,}42 \cdot \frac{3}{12}\right)}$$

$$D_r = \frac{(4.000{,}00 \cdot 0{,}42 \cdot 0{,}25)}{(1 + 0{,}42 \cdot 0{,}25)}$$

$$D_r = \frac{420{,}00}{1{,}105}$$

$$D_r = R\$380{,}10$$

Valor Descontado

$$PV = \frac{4.000{,}00}{\left(1 + 0{,}42 \cdot \frac{3}{12}\right)}$$

$$PV = \frac{4.000{,}00}{(1{,}105)}$$

$$PV = R\$3.619{,}91$$

2) (ASSAF NETO, 2001). Determinar a taxa mensal de desconto racional de um título negociado 60 dias antes de seu vencimento, sendo seu valor de regate igual a R$ 26.000,00 e valor atual na data do desconto de R$ 24.436,10.

Solução:

$$i = \frac{\left(\frac{26.000,00}{24.436,10} - 1\right)}{\frac{60}{30}}$$

$$i = \frac{0,063999}{2}$$

$$i = 0,032 \text{ ao mês} = 3,2\% \text{ ao mês}$$

1.7 Equivalência de Capitais a Juros Simples.

Dois (ou mais) capitais, com datas de vencimento diferentes, são ditos capitais equivalentes quando, transportados para uma mesma data, a mesma taxa, produzirem, nessa data, valores iguais.

A data para a qual os capitais serão transportados é chamada data focal. No regime de juros simples, a escolha da data focal influencia a resposta do problema. Isto significa que definida uma taxa de juro, e a forma de calculo (se racional ou comercial), dois capitais diferentes, em datas diferentes, podem ser equivalentes, se transportados para outra data, mesmo mantendo-se todas as outras condições do problema. (PARENTE, 1996).

1.7.1 Formulas

Para vencimentos anteriores a data focal

$$N = V \cdot (1 + i \cdot n)$$

Para vencimentos posteriores a data focal

$$V = \frac{N}{(1 + i \cdot n)}$$

1.7.2 Exemplo

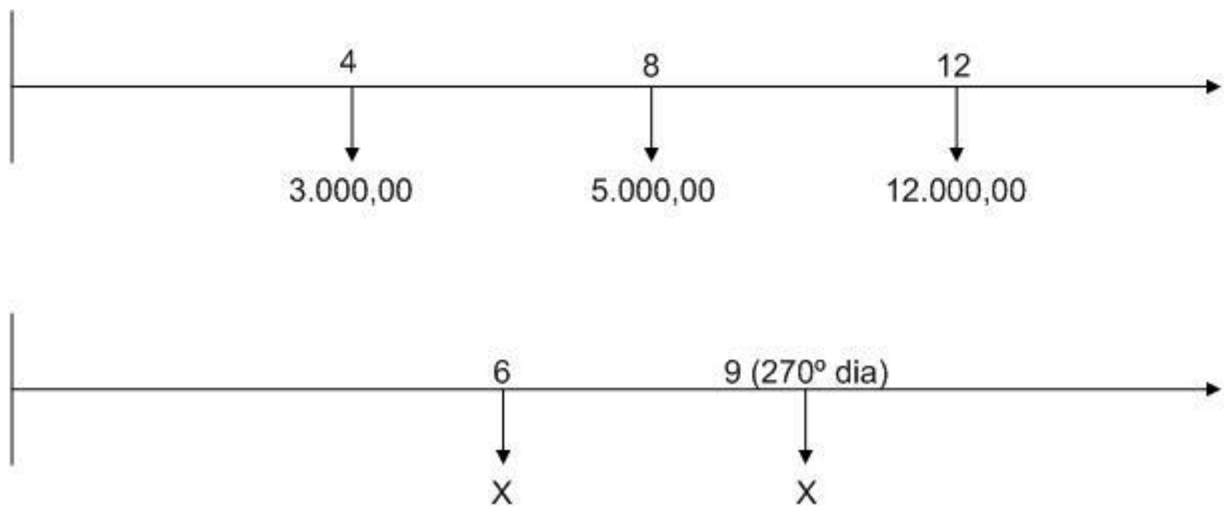
1) Um empresário tem os seguintes compromissos a pagar:

- **R$ 3.000,00 daqui a 4 meses**
- **R$ 5.000,00 daqui a 8 meses**
- **R$ 12.000,00 daqui a 12 meses**

O empresário propõe trocar esses débitos por dois pagamentos iguais, um para daqui a 6 meses e outro para daqui a 9 meses. Considerando a taxa de juros simples de 5% a.m. e a data focal no 270° dia, calcular o valor de cada pagamento.

Solução:

Fluxo de caixa



$$x(1+0,05\cdot 3)+x = 3.000,00\cdot(1+0,05\cdot 5)+5.000,00\cdot(1+0,05\cdot 1)+\frac{12.000,00}{(1+0,05\cdot 3)}$$

$$1,15x + x = 3.750,00 + 5.250,00 + 10.434,78$$

$$2,15x = 19.434,78$$

$$x = \frac{19.434,78}{2,15}$$

$$x = R\$9.039,43$$

REFERÊNCIAS

https://www.todamateria.com.br/matematica-financeira-conceitos-formulas/>acesso em 05/06/2020

https://support.hp.com/br-pt/document/c02043573>acesso em 05/06/2020

https://matematicabasica.net/juros-simples/>acesso em 05/06/2020

https://maisretorno.com/blog/termos/m/montante>acesso em 05/06/2020

https://matematicafinanceira.webnode.com.br/capitaliza%C3%A7%C3%A3o%20composta/>acesso em 05/06/2020

https://www.somatematica.com.br/emedio/finan5.php#:~:text=Taxas%20equivalentes,uma%20taxa%20anual%20ia.>acesso em 05/06/2020

https://blog.keruak.com.br/valor-do-dinheiro-no-tempo/#:~:text=O%20valor%20do%20dinheiro%20no%20tempo%20%C3%A9%20um%20conceito%20financeiro,maior%20de%20dinheiro%20no%20futuro.>acesso em 05/06/2020

https://www.algosobre.com.br/matematica-financeira/capitalizacao-simples.html>acesso em 05/06/2020

https://matematicafinanceira.webnode.com.br/capitaliza%C3%A7%C3%A3o%20simples/.acesso em 05/06/2020