Matemática

POTÊNCIAS

1. Definições

Acreditamos que é mais cômodo escrever a soma x + x + x na forma 3x. Igualmente, podemos escrever o produto x.x.x de maneira mais simples, utilizando **expoentes**. Assim, escrevemos:

$x.x.x = x^3$

Então, para qualquer número **x**, a escritura $\mathbf{x^3}$, que se lê "x à terceira potência" , representa o produto de três fatores iguais a **x**.

A expressão x^3 é uma **potência de base x**, ou simplesmente potência de x; nela, 3 é um **expoente**.

RAÍZES

1. O que é uma raiz

Vamos considerar algumas questões envolvendo números reais.

1ª questão: "Qual é o número real x cujo cubo é igual a 8, isto é, $x^3 = 8$?"

A resposta a essa questão é fácil e precisa. Esse número **x** existe e é um só; **é o número 2** pois $2^3 = 8$.

Dizemos, então, que **2 é a raiz cúbica de 8**, e escrevemos:

$\sqrt[3]{8} = 2$

note que $(\sqrt[3]{8})^3 = 8$

Potência com Expoente Fracionário

POTÊNCIA COM EXPOENTE FRACIONÁRIO

1. Definição de $a^{\frac{1}{n}}$

Definição

Para um número real **a** e um inteiro positivo **n** (n ³ 2), definimos

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\mathbf{a}}$

desde que exista $\sqrt[n]{a}$.

Exemplos

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2 \qquad \left[(\mathbf{-2})^3 = \mathbf{-8}\right]$$

$$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{16} = 4 \qquad (\mathbf{4}^2 = \mathbf{16})$$

$(-4)^{\frac{1}{2}}$ não representa um número pois $\sqrt{-4}$ não é um número (!)

2. Definição de $a^{\frac{m}{n}}$

Nós podemos ampliar a definição de $a^{\frac{1}{n}}$ para expoentes fracionários com numeradores distintos de 1. Por exemplo, se escrevermos $16^{\frac{3}{2}}$ como $(16^{\frac{1}{2}})^3$, temos

$$16^{\frac{3}{2}} = (16^{\frac{1}{2}})^3 = (\sqrt{16})^3 = 4^3 = 64$$

Veja que simplificamos $16^{\frac{3}{2}}$ e levando ao cubo a raiz quadrada de 16. Essa simplificação também poderia ser feita extraindo a raiz quadrada do cubo de 16.

$$16^{\frac{3}{2}} = (16^3)^{\frac{1}{2}} = (4096)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4096} = 64$$

Definição

Sejam **m** e **n** inteiros positivos, com n ³ 2. Se **a** é um número para o qual **existe** $\sqrt[n]{a}$, então

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Também,

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

Exemplos

$$\begin{aligned} 27^{\frac{2}{3}} &= \sqrt[3]{27^2} \\ &= \sqrt[3]{729} \\ &= 9 \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} 27^{\frac{3}{2}} &= (\sqrt[3]{27})^2 \\ &= 3^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{16}\right)^3} = \sqrt[4]{\frac{1}{4096}} = \frac{1}{8} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{16}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Fatoração

FATORAÇÃO

1. O fator comum

Fatorar uma expressão algébrica é escrevê-la na forma de um produto de fatores.

Exemplos

soma algébrica		produto de fatores
$ka + kb$	=	$k \, . \, (a + b)$
$ka - kb$	=	$k \, . \, (a - b)$
$ka + kb - kc$	=	$k \, . \, (a + b - c)$

fatoração é uma transformação de escrita

Equações

EQUAÇÕES

Equações de 1º e 2º graus

O problema

Quando escrevemos uma **equação**, como por exemplo

"x^2 - 2x = x - 4"

propomos o seguinte problema:

"Quais são os valores de x para os quais a igualdade é verdadeira?"

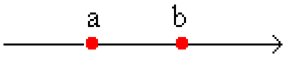
Resolver uma equação é dar resposta ao problema, isto é, **é encontrar todos os valores de x que verificam (satisfazem) a igualdade**. Tais valores (números) são as **raízes** ou as **soluções** da equação.

INEQUAÇÕES

Inequações no conjunto dos números reais

1. Escrituras para as inequações

Na reta numérica representada na figura abaixo, **a** está à esquerda de **b**. Diz-se que **a é menor do que b**.



Com símbolos, escrevemos

$$a < b$$

Também, vemos que **b** está à direita de **a**; dizemos que **b é maior do que a**, e escrevemos

$$b > a$$

FUNÇÕES

1. O que é uma função

Muitos fenômenos do nosso cotidiano envolvem duas grandezas que se relacionam de alguma forma por alguma regra de correspondência.

Por exemplo, suponha que a **velocidade média** de um carro é de 60 km/h. A distância percorrida pelo carro fica determinada pelo tempo que dura a viagem:

distância = velocidade x tempo

Usando símbolos (letras), essa relação pode ser expressa pela equação

$$d = 60 . t$$

na qual **d** é a **distância percorrida** (em km) no **tempo t** (em horas).

Quando t = 5 (horas) a distância percorrida é

$$d = 60 . 5 = 300 \text{ (km)}$$

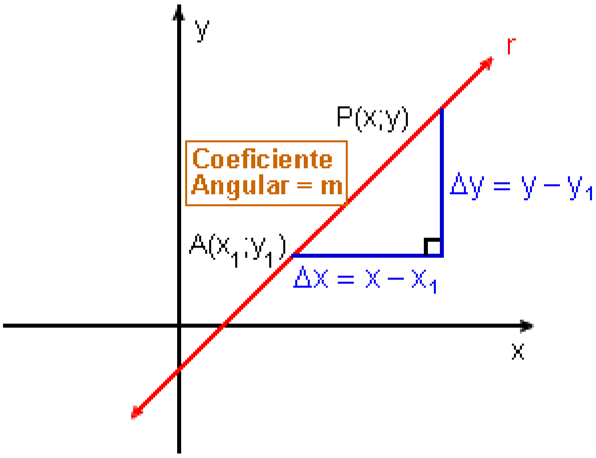
Note que para cada valor de **t** (é razoável dizer que $t \geq 0$) a equação produz exatamente o valor da distância **d**. Dizemos que a equação **d = 60 . t** descreve uma relação entre as grandezas **d** e **t** que é uma **função** ou, ainda, dizemos que a grandeza **d** é uma **função** da grandeza **t**.

Na relação descrita, observe que para cada escolha de **t** ($t \geq 0$) há exatamente um valor de **d** associado a **t**.

AS VÁRIAS FORMAS DA EQUAÇÃO DE UMA RETA

1. Forma coeficiente angular-ponto

Suponha que a reta **r** passa pelo ponto A (x_1; y_1) e tem coeficiente angular **m.**



Se P (x; y) é um ponto sobre **r ,** temos:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

E multiplicando em cruz obtemos:

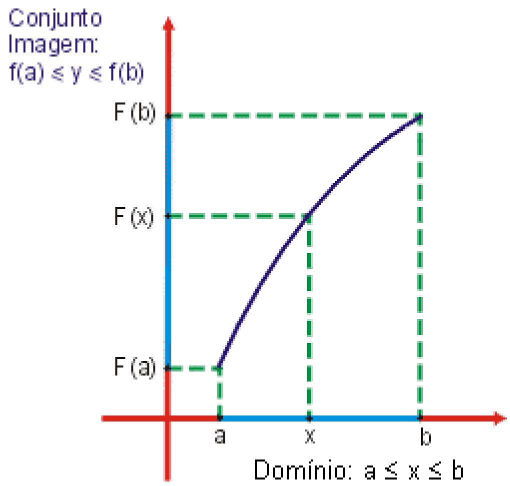
$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

UM RETORNO ÀS FUNÇÕES

Gráfico de uma função

O **gráfico de uma função** é o gráfico de todos os pares ordenados (x; f(x)) que definem a função.

Para o gráfico da figura, o domínio é mostrado sobre o eixo-x, e o conjunto imagem é mostrado sobre o eixo-y.



INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

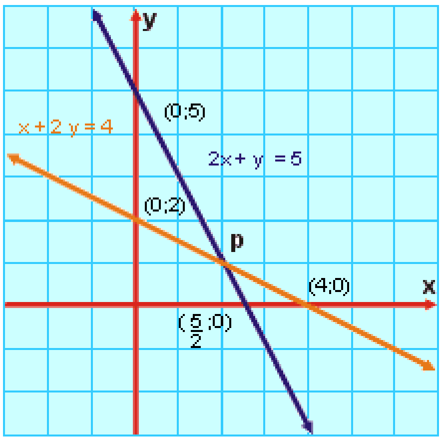
1. Métodos de resolução

No plano, duas retas não paralelas encontram-se exatamente em um ponto. A partir das equações das retas podemos determinar as coordenadas desse ponto.

Por exemplo, sejam as retas de equações:

$x + 2y = 4$

$2x + y = 5$



Note que as coordenadas do ponto de intersecção P devem satisfazer cada uma das equações. Para determiná-las devemos resolver o sistema formado pelas equações das duas retas.

COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Função composta

Sejam as funções **f** e **g** dadas por

$f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2$.

Tomemos um valor do domínio de **f**; por exemplo, $x = 2$. Então, obtemos

$$f(2) = 2 \,.\, 2 + 1 = 5$$

Agora, usamos esse resultado como um valor do domínio de **g**, para obter

$$g(5) = 5^2 = 25.$$

Essas duas construções, uma depois da outra, podem ser resumidas assim

Lê-se "g de f de 2"

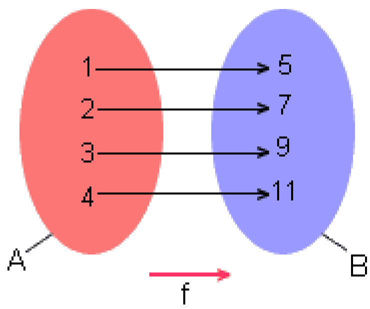
$\rightarrow$ $g(f\,(2)) = g(5) = 25$

Note que o valor $x = 2$, no domínio de **f**, produz um valor igual a 5, no conjunto imagem de **f**; este, por sua vez, é um valor do domínio de **g**, e produz o valor 25 no conjunto imagem de **g**.

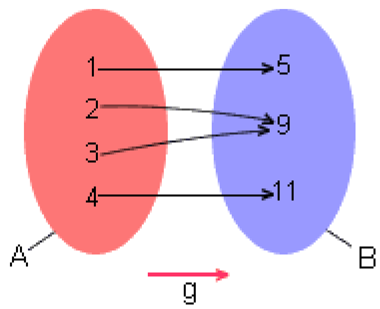
A FUNÇÃO INVERSA

1. Função um-para-um

Na figura, observe as funções **f** e **g**.



f é um-para-um



g não é um-para-um

Note que, em **f**, quaisquer dois números do domínio *A* têm imagens diferentes mas, em **g**, 2 e 3 têm a mesma imagem 9. Em símbolos, $g(2) = g(3)$ mas $f(x_1) \neq f(x_2)$ para quaisquer $x_1 \neq x_2$.

FUNÇÕES POLINOMIAIS

1. Definições

Polinômio em uma variável

Um **polinômio em uma variável x** é a soma de termos (expressões) da forma ax^n, onde **a** é um número real e **n** é um número natural.

Por exemplo, as expressões

$4x^2 - 3x$, $\frac{3}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x$, $4x - 12x^5$ são polinômios na variável **x**.

As expressões

$\frac{12x}{x^3+2x}$, $x^{\frac{1}{3}} - 1$, $x^{-2} + x^3$

não são polinômios em **x**

Note que a primeira expressão é um quociente de dois polinômios, e as duas outras têm expoentes que não são naturais.

NÚMEROS COMPLEXOS

1. Definições

Vimos na resolução de uma equação do 2º grau que se o discriminante é negativo, ela não admite raízes reais. Por exemplo, a equação

$x^2 + 9 = 0$

não admite raízes reais. Se usarmos os métodos que conhecemos para resolvê-la, obtemos

$x^2 = -9$

$x = \pm\sqrt{-9}$

mas é inaceitável tal resultado para **x**; **os números negativos não têm raiz quadrada**.

Para superar tal impossibilidade e poder, então, resolver todas equações do 2º grau, os matemáticos ampliaram o sistema de números, inventando os **números complexos**.

RAÍZES COMPLEXAS DE UM POLINÔMIO

O Teorema Fundamental da álgebra

A ampliação do conceito de número, com a construção do conjunto dos números complexos, nos oferece um sistema no qual **toda equação polinomial tem uma raiz**. A demonstração dessa propriedade não é simples e foge dos propósitos do nosso curso; ela foi feita em 1799 pelo matemático alemão C. F. Gauss.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Todo polinômio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \ (n \geq 1, a_n \neq 0)$$

com coeficientes complexos tem ao menos uma raiz complexa.

Note que um número real é também um número complexo; então, o teorema aplica-se para polinômios com coeficiente reais. Também, podemos dizer que a equação P(x) = 0 tem ao menos uma raiz real.

Pelo **teorema do Fator** sabemos que a toda raiz de um polinômio corresponde um fator do 1º grau; então o **Teorema Fundamental da álgebra** garante que podemos fatorar qualquer polinômio P(x) de grau **n** como

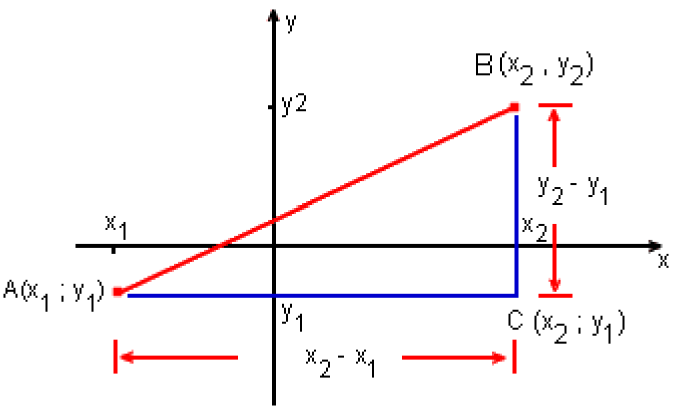
$$P(x) = (x - c_1) . P_1 (x)$$

onde $P_1(x)$ é um polinômio de grau n - 1, e c_1 é uma raiz de P(x).

CIRCUNFERÊNCIAS

Distância entre dois pontos

No plano **x - y** consideremos os pontos $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ e vamos calcular a distância entre eles.



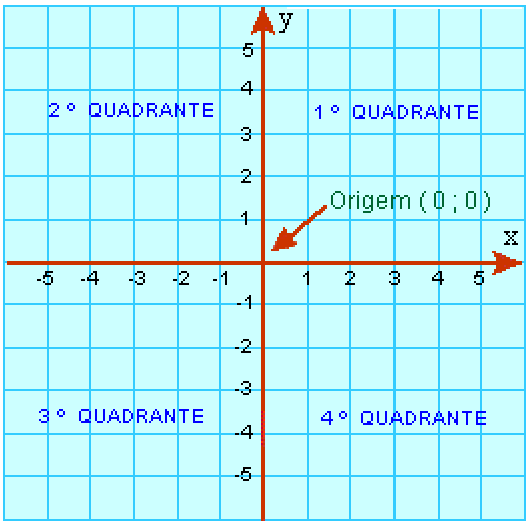
O triângulo ABC é retângulo; o Teorema de Pitágoras nos dá para a distância d(A, B) entre A e B:

$$d^2 (A, B) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$d (A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

GRÁFICOS DE RETAS EM UM SISTEMA ORTOGONAL DE COORDENADAS

O sistema de coordenadas

Um **sistema ortogonal de coordenadas** consiste de duas retas numéricas perpendiculares, que dividem o plano em quatro quadrantes como mostra a figura.



A reta numérica horizontal chama-se **eixo - x** e a vertical, **eixo - y** . A intersecção dos dois eixos é a **origem** do sistema, e é também a **origem** de cada um dos eixos.

O sentido positivo do **eixo - x** é "para a direita" e o sentido positivo do **eixo - y** é "para cima".

CONJUNTOS NUMÉRICOS

1. Os números racionais

- $\mathbb{N}$ = { 0, 1, 2, 3, ...} é o conjunto dos **números naturais**.
- $\mathbb{Z}$ = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...} é o conjunto dos **números inteiros**.
- é **racional** um número que pode ser escrito como um quociente entre dois inteiros; assim, se p e q são números inteiros e $q \neq 0$, $\frac{p}{q}$ é um **número racional.**

Por exemplo:

$$\frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{37}, \ldots$$

são **números racionais.**

Função exponencial

Para cada número real b (positivo e diferente de 1) podemos construir uma função chamada **função exponencial com base b,** cujo domínio é o conjunto de todos os números reais e cuja fórmula (equação) é $y = b^x$. Por exemplo

$$y = 2^x,\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x,\ y = (1{,}5)^x,\ y = 10^x$$

Função exponencial

Para toda constante real **b**, $b > 0$ e $b \neq 1$ a equação

$$y = b^x$$

define uma **função exponencial com base b**, cujo domínio é o conjunto dos números reais.

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Problemas de Raciocínio Matemático constituem uma grande parte das questões de Matemática testadas no ENEM. Tais questões frequentemente exigem que você "traduza" o texto do português para a matemática. Esse tipo de questão, além de testar seu raciocínio e sua habilidade de resolver problemas matemáticos, é uma forma de medir seu domínio das diferentes áreas do estudo da Matemática: Aritmética, Álgebra, leitura de tabelas e gráficos, Probabilidade e Estatística, Geometria etc.

A melhor forma de melhorar seu desempenho em questões de Raciocínio Matemático é praticar. Portanto, o 10emtudo preparou para você uma série de exercícios com resoluções detalhadas. Tente resolver as questões antes de consultar a resolução delas. É praticando – e errando – que se adquire um melhor domínio desse tipo de questão.

ESTATÍSTICA

Estatística é o método científico utilizado para coletar, organizar, resumir, interpretar e apresentar dados.

O Enem testa a habilidade de o aluno ler gráficos e interpretar dados corretamente. Aperfeiçoar essa habilidade é fundamental para um bom desempenho na prova.

Definição

Conjunto de métodos que tem como objetivo a coleta, o tratamento e a interpretação de dados.

Dados

Estatísticos coletam dados porque têm interesse em descobrir alguma característica ou tendência sobre um grupo de indivíduos ou fenômenos. As características variam conforme o estudo estatístico realizado.

O conjunto de todos os elementos que podem oferecer informações relativas ao estudo efetuado é chamado de **universo estatístico** ou **população**. Quando a população de um estudo estatístico é grande ela é raramente estudada como um todo. Nesse caso, estatísticos utilizam uma **amostra** da população. Uma amostra é utilizada quando há uma impossibilidade de estudar o universo estatístico ou uma falta de praticidade em lidar com o universo estatístico como um todo.