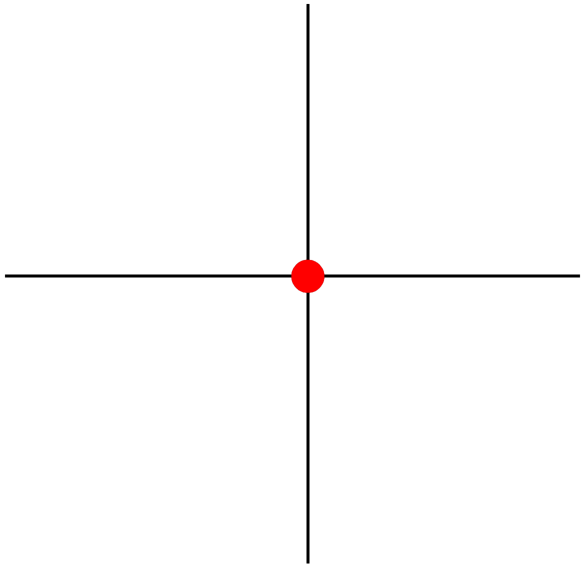
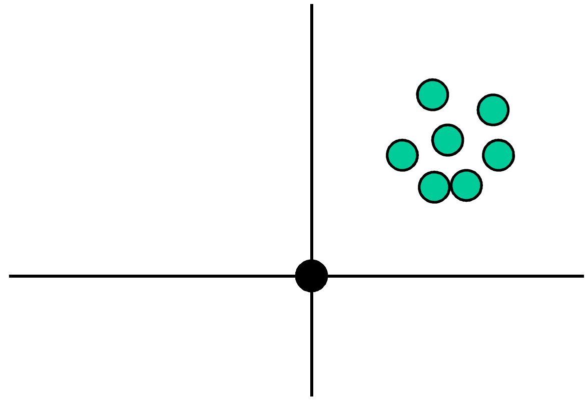
Características Estáticas e Dinâmicas

Características estáticas

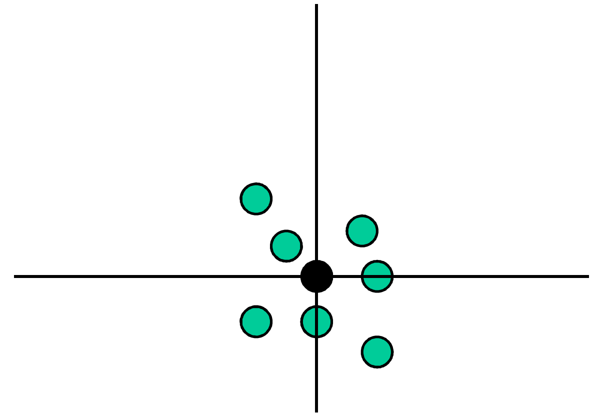
Um sistema de medição, devido aos seus diversos elementos, sempre apresenta incertezas nos valores medidos.

Todo sistema de medição está sujeito a incertezas (erros de medição), o que torna um sistema melhor em relação ao outro é a diminuição deste erros a níveis que sejam aceitáveis para a aplicação.

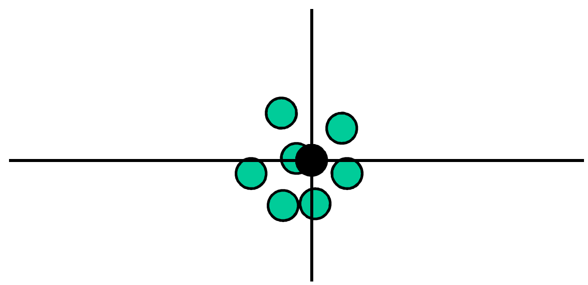




Alta Precisão
Baixa Exatidão



Baixa Precisão
Alta Exatidão



Alta Precisão
Alta Exatidão

Precisão - A precisão de um sistema de medição representa o quanto as leituras fornecidas por ele se aproximam do valor médio de uma amostra. O desvio padrão (erro aleatório) expressa numericamente a precisão de um sistema de medidas.

Exatidão - A exatidão de um sistema expressa o quanto as leituras fornecidas por ele se aproximam do valor real que está sendo medido. O desvio sistemático (bias) expressa numericamente a exatidão de um sistema de medidas.

A incerteza de um sistema de medição é a combinação da precisão com a exatidão deste sistema.

Tolerância - O termo tolerância indica o erro máximo do sistema de medição

Repetibilidade - Este termo é utilizado para expressar a capacidade de um sistema de medição em indicar a mesma saída para uma série de aplicações do mesmo sinal de entrada, sendo os intervalos de tempo entre as aplicações relativamente pequenos.

Estabilidade - É a capacidade do sistema em indicar a mesma saída para uma série de aplicações do mesmo sinal de entrada, quando os intervalos de tempo entre as aplicações forem longos.

2.1.1 - Calibração e padrões de medidas

Todo instrumento de medição e conseqüentemente todo sistema de medição deve ser calibrado ou aferido para que forneça medidas corretas.

A calibração é o processo de verificação de um sistema de medição contra um padrão que pode ser primário ou secundário.

O padrão primário é definido por entidades especializadas, renomados institutos de pesquisa ou entidades governamentais especificas de cada país.

Dificilmente se faz na prática a calibração pelo padrão primário.

INMETRO www.inmetro.gov.br

IPEM www.ipem.pr.gov.br

O padrão secundário é um instrumento que tem precisão maior que a do sistema que está sendo calibrado.

Os padrões secundários são calibrados a partir dos primários com suas devidas certificações feitas pelos institutos responsáveis.

Os instrumentos que constituem padrão secundário devem ser constantemente verificados, pois devido ao uso e às eventuais condições ambientais não adequadas, alteram-se as suas características (parâmetros de funcionamento).

Existem algumas razões pelas quais um sistema de medição em uso pode não corresponder à sua calibração.

Primeiramente, o sistema pode estar sendo utilizado sob condições diferentes daquelas em que o instrumento foi calibrado.

A maior parte dos sistemas de medição é sensível a temperatura, e a calibração geralmente é feita apenas para uma temperatura especificada.

Outras condições do meio ambiente também podem afetar um instrumento, por exemplo, são afetados por mudanças na pressão atmosférica, e outros pela umidade relativa.

Estatística aplicada em medições

$$D = \overline{D} \pm U_D$$

A - Cálculo de incerteza de grandezas com várias medidas :

A.1 - Valor médio das medidas e desvio padrão da amostra:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} \qquad \sigma_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2}{N-1}}$$

A.2 - Valor da medida e sua incerteza :

Exemplo : Medição do diâmetro de uma barra circular :

São efetuadas n medidas em diâmetros diferentes, i=1 até n , e indica-se :

$$D = \overline{D} \pm U_D \qquad\qquad U_D = 3.\sigma_D + B_D$$

onde:

3 : Parâmetro "t" de Student para 99,7% de confiabilidade.

B_D : Erro sistemático (bias) do instrumento, obtido com calibração comparada a um padrão rastreável

B - Cálculo da incerteza de grandezas com uma medida :

Utilizando um instrumento que seja confiável ou que tenha sido aferido contra algum tipo de padrão com menor divisão da ordem de 10% do valor da menor divisão do instrumento, podemos adotar:

Incerteza : $U_X = \frac{1}{2}$ Menor divisão do instrumento

Desvio padrão : $\sigma_X = \frac{U_X}{3}$ considerando $B_X = 0$

C - Cálculo da incerteza de grandezas dependentes:

$r = f(G_1, G_2, ..., Gm)$ = Grandeza dependente

σ_r = Desvio-padrão da grandeza dependente

$G_1, G_2, ..., Gm$ = Grandezas independentes

σ_{Gi} = Desvio-padrão das grandezas independentes

$$\sigma_r = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial r}{\partial G_i}.\sigma_{G_i}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial G_1}.\sigma_{G_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial G_2}.\sigma_{G_2}\right)^2 + .. + \left(\frac{\partial r}{\partial G_m}.\sigma_{G_{mi}}\right)^2}$$

Exemplo 1: Área em função do diâmetro

$$A = f(D) = \frac{\pi D^2}{4}$$ $U_A = ?$ com D e σ_D conhecidos [m]

$$\sigma_r = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial r}{\partial G_i}.\sigma_{G_i}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial G_1}.\sigma_{G_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial G_2}.\sigma_{G_2}\right)^2 + .. + \left(\frac{\partial r}{\partial G_m}.\sigma_{G_{mi}}\right)^2}$$

$\sigma_A = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial D}.\sigma_D\right)^2}$	$\sigma_A = \frac{\pi D}{2}.\sigma_D$	$\sigma_A = \frac{\pi D^2}{4}.\frac{2}{D}.\sigma_D = 2.A.\frac{\sigma_D}{D}$

$$\frac{\sigma_A}{A} = 2.\frac{\sigma_D}{D}$$ $U_A = 3.\sigma_A$ $(B_A=0)$

Exemplo 2: Resistência como função da tensão e da corrente

$R = f(V,I) = V/I$ => $U_R = ?$ V, I, σ_V e σ_I = conhecidos

$$\sigma_r = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial r}{\partial G_i}.\sigma_{G_i}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial G_1}.\sigma_{G_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial G_2}.\sigma_{G_2}\right)^2 + .. + \left(\frac{\partial r}{\partial G_m}.\sigma_{G_{mi}}\right)^2}$$

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial V}.\sigma_V\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}.\sigma_I\right)^2}$$

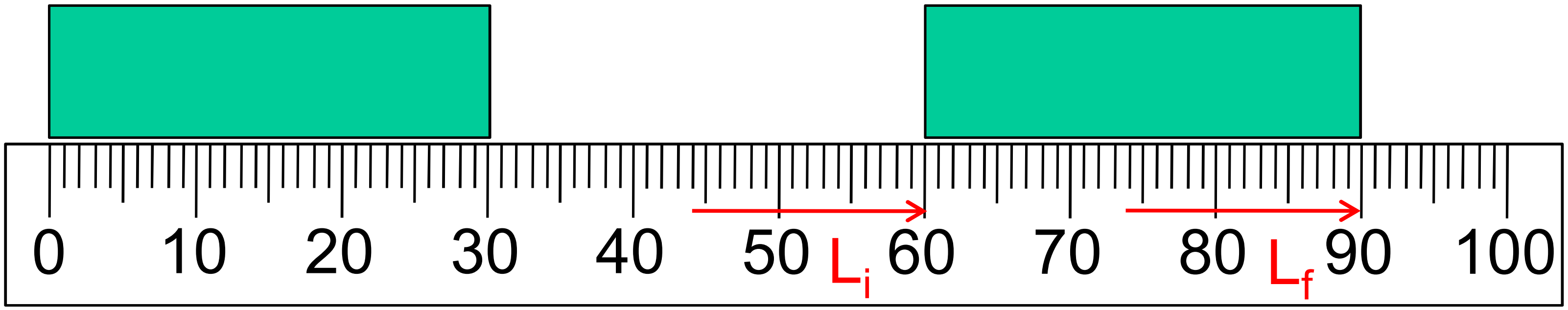
$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{1}{I}.\sigma_V\right)^2 + \left(-\frac{V}{I^2}.\sigma_I\right)^2}$$

$$\frac{\sigma_R}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\left(\frac{1}{I}.\sigma_V\right)^2 + \left(-\frac{V}{I^2}.\sigma_I\right)^2}$$

$$\frac{\sigma_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2}$$

$U_R = 3.\sigma_R$ $(B_R=0)$

Exemplo 3: Medição de comprimento com uma régua ou trena



$L = f(L_i, L_f) = L_f - L_i$ => $U_L = ?$ L_f , L_i , $\sigma_{L\text{-}f}$, $\sigma_{L\text{-}i}$ = conhecidos

$$\sigma_r = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial r}{\partial G_i}.\sigma_{G_i}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial G_1}.\sigma_{G_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial G_2}.\sigma_{G_2}\right)^2 + .. + \left(\frac{\partial r}{\partial G_m}.\sigma_{G_{mi}}\right)^2}$$

$$\sigma_L = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial L_f}.\sigma_{L-f}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial L_i}.\sigma_{L-i}\right)^2}$$

$$\sigma_L = \sqrt{(1.\sigma_{L-f})^2 + (-1.\sigma_{L-i})^2}$$

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma_{L-f}{}^2 + \sigma_{L-i}{}^2}$$

$$\sigma_{L-f} = \sigma_{L-i} = \frac{0,5}{3} = 0,166...[mm]$$

$$\sigma_L = 0,236..[mm]$$

$$U_L = 3\sigma_L = 0,707..[mm]$$

D - Ajuste de curvas - Método dos mínimos quadrados

Devido a simplicidade dos cálculos e a extensa aplicabilidade em ajustes de curvas em pontos (regressão numérica), o método dos mínimos quadrados é largamente utilizado na <u>calibração estática de sistemas de medição</u>.

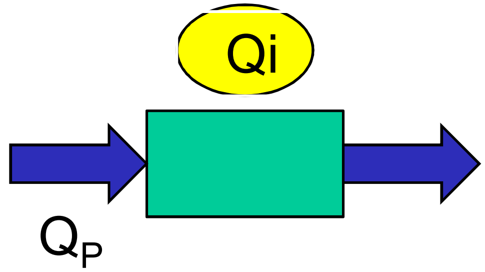
Pode-se utilizar este método para vários tipos de curvas (funções), e aqui apresenta-se uma aplicação para medidor de vazão tangencial, calibrado através do método gravimétrico.

Equacionamento:

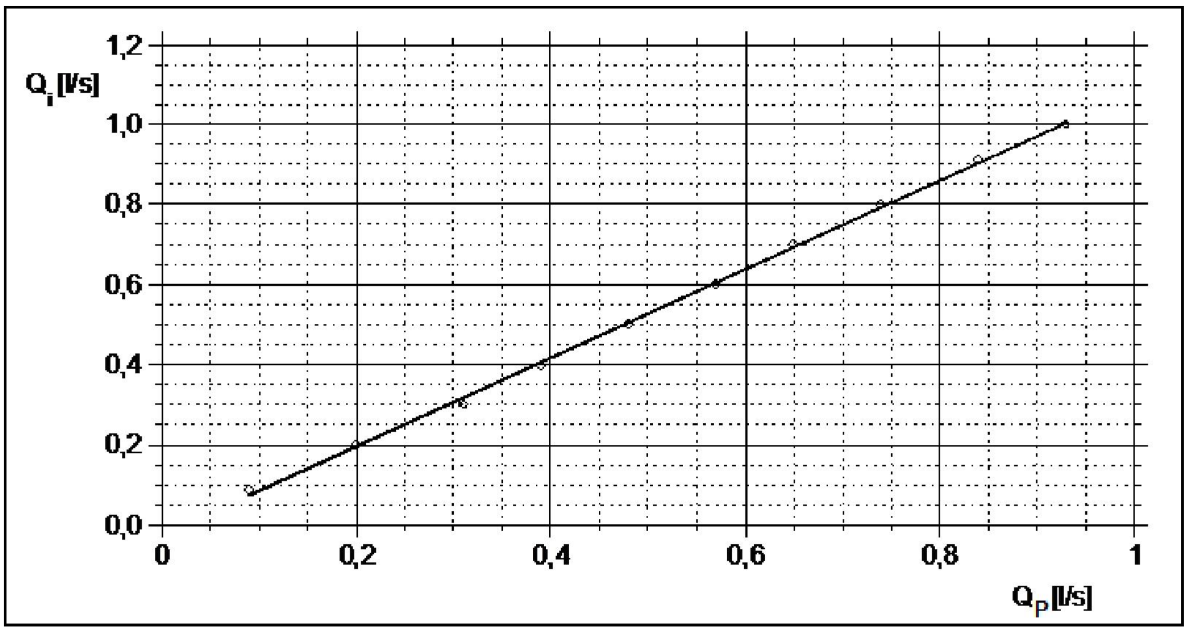
$$\begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$B = \frac{\sum y - A\sum x}{n}$$



Q_P	Qi
l/s	l/s
0,09	0,09
0,20	0,20
0,31	0,30
0,39	0,40
0,48	0,50
0,57	0,60
0,65	0,70
0,74	0,80
0,84	0,91
0,93	1,00



$Qi = 1{,}105 \,.\, Q_P - 0{,}0246$

$Q = 0{,}902 \,.\, Qi + 0{,}0232$

Características dinâmicas

Função de transferência

O estudo de características de instrumentos é uma das aplicações de uma área do conhecimento mais geral, denominada dinâmica de sistemas.

O modelo matemático mais simples e aplicado à este estudo é o que faz uso equações diferenciais lineares ordinárias, cuja solução é obtida através de transformadas de Laplace.

Seja um sistema de medição representado (*em geral para todos os sistemas analógicos isto é possivel*) por uma única equação diferencial linear do tipo:

$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

onde c(t) é a quantidade de saída (sinal de saída) e e(t) é a quantidade de entrada (grandeza a ser medida), e os coeficientes a_i (i = 0 a n) e b_j (j=0 a m) são constantes.

$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

A transformada de Laplace para a equação anterior, considerando condições iniciais nulas, é:

$$(a_n.s^n + a_{n-1}.s^{n-1} + \ldots + a_1.s + a_0).C(s) = (b_m.s^m + b_{m-1}.s^{m-1} + \ldots + b_1.s + b_0).E(s)$$

Portanto, a função de transferência para o sistema de medição será:

$$\frac{C(s)}{E(s)} = \frac{(b_m.s^m + b_{m-1}.s^{m-1} + \ldots + b_1.s + b_0)}{(a_n.s^n + a_{n-1}.s^{n-1} + \ldots + a_1.s + a_0)}$$

Esta função de transferência geral permite a análise dinâmica de qualquer sistema de medição linear, porém alguns sistemas mais simples, de grande aplicação prática são destacados nos itens posteriores.

Função de transferência senoidal

Na análise dinâmica de sistemas de medição utiliza-se entradas padrões (equivalentes a variação da grandeza a ser medida), sendo que a entrada senoidal é uma de grande importância.

Este tipo de entrada permite a avaliação da resposta dos instrumentos quanto a ruídos, perturbações oscilatórias, e quanto ao desempenho na medição de grandezas variáveis no tempo, em altas e baixas frequências.

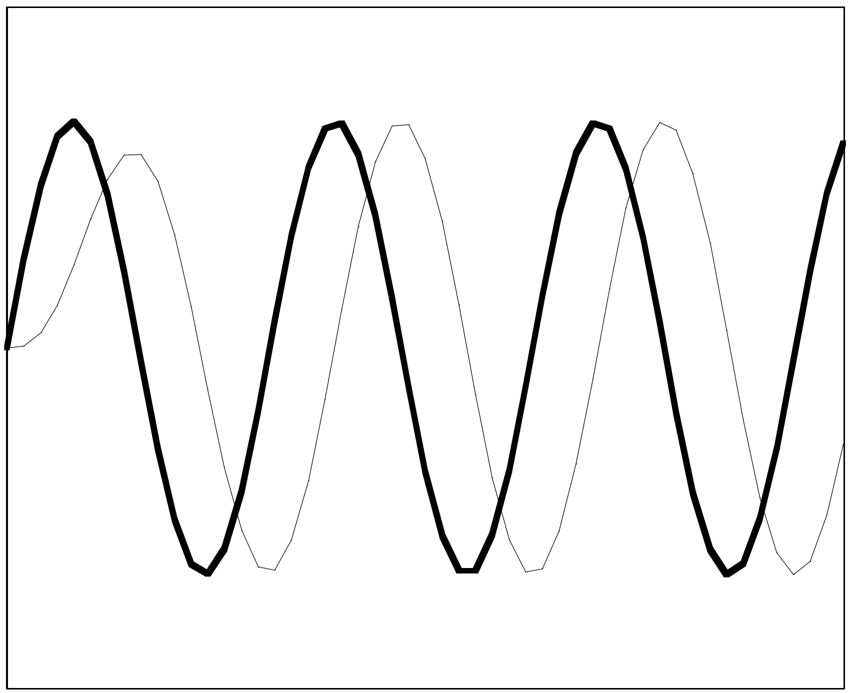
O método apresentado pode também ser utilizado para análise de condicionadores de sinais.

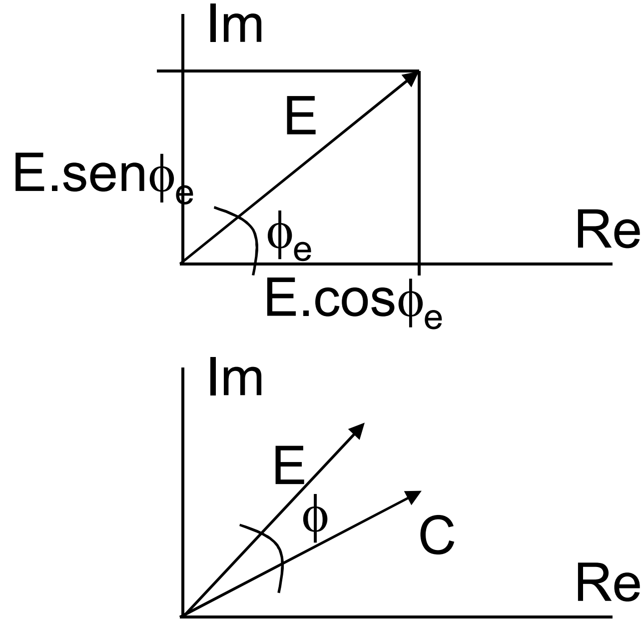
A função de transferência senoidal de um sistema de medição é obtida substituindo a variável complexa s da função de transferência do sistema por $j\omega$:

$$\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{(b_m.j\omega^m + b_{m-1}.j\omega^{m+1} + \ldots + b_1.j\omega + b_0)}{(a_n.j\omega^n + a_{n-1}.j\omega^{n-1} + \ldots + a_1.j\omega + a_0)}$$

Para qualquer ω - frequência de entrada, equação acima fornecerá um número complexo, que poderá ser expresso na forma polar $M\angle\phi$.

Pode-se demonstrar que o módulo M do número complexo é relação entre amplitudes da saída e da entrada, C_0 / E_0 , enquanto que o ângulo ϕ é o ângulo de atraso (ou avanço) entre saída e entrada, em regime estacionário.




Im
E
E.senφe
φe
Re
E.cosφe
Im
E
φ
C
Re

Instrumento de ordem zero

Quando todos os coeficientes a_i e b_j , exceto a_0 e b_0, da equação geral são iguais a zero o instrumento é chamado de instrumento de ordem zero:

$$a_0 c(t) = b_0 e(t) \quad \text{ou} \quad \frac{c(t)}{e(t)} = \frac{b_0}{a_0} = K \quad \text{ou} \quad c(t) = K\, e(t)$$

onde K é chamado de sensibilidade estática (ou ganho estático). Observa-se que não haverá nem atraso nem distorção na medição da grandeza e(t) pelo medidor de ordem zero, representando um instrumento ideal ou perfeito quanto ao desempenho dinâmico..

Pode-se modelar matematicamente um potenciômetro como um instrumento de ordem zero, assim como alguns outros medidores, porém sempre existirá efeitos secundários modificando a característica do instrumento, que devem ser considerados em conformidade com a aplicação.

Instrumento de primeira ordem

Um instrumento de primeira ordem segue a seguinte equação:

$$a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) = b_0 e(t) \quad \text{ou} \quad \frac{a_1}{a_0}\frac{dc(t)}{dt} + c(t) = \frac{b_0}{a_0} e(t) \quad \text{ou} \quad \tau \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = K\, e(t)$$

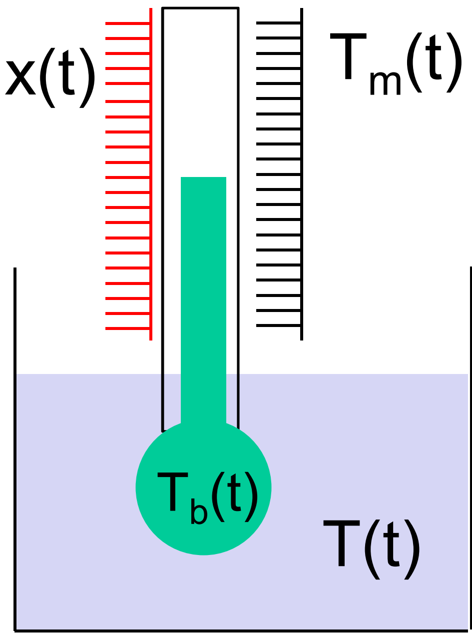
Utilizando a transformada de Laplace, obtém-se:

$$\frac{C(s)}{E(s)} = \frac{K}{\tau.s + 1}$$

onde K é chamado de sensibilidade estática, e τ é a constante de tempo do instrumento.

Um termômetro de bulbo é um exemplo de um instrumento de primeira ordem, assim como qualquer medidor de temperatura que necessite alterar a temperatura de uma massa (de um sensor) para realizar a medição.

Exemplo: Termômetro de bulbo



T(t) = e(t) = Sinal de entrada (temperatura do meio)

x(t) = c(t) = Sinal de saída ("nível" de mercúrio)

$$x(t) = \frac{K_{ex} V_b}{A_S} . T_b(t) \qquad x(t) = K.T_b(t)$$

K_{ex} = diferença do coeficiente de expansão térmica entre mercúrio e o vidro [1/^{o}C]

V_b = volume do bulbo [m^3]

A_s = área seccional do capilar [m^2]

$$\boxed{K = \frac{K_{ex} V_b}{A_S}} \qquad \frac{m}{C^o}$$

$$V_b \rho C \frac{dT_b(t)}{dt} = UA_b[T(t) - T_b(t)]$$

U = coeficiente global de transferência de calor [W/m^{2}K]

A_b = área de contato do bulbo [m^2]

V_b ρ = massa de mercúrio no bulbo [kg]

C = calor específico do mercúrio [J/kgK]

$$\boxed{\tau = \frac{V_b \rho C}{UA_b}} \quad [s]$$

$$\tau \frac{dT_b(t)}{dt} = T(t) - T_b(t) \qquad \tau \frac{dT_b(t)}{dt} + T_b(t) = T(t)$$

$$\tau \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = K.T(t)$$

Laplace:

$$(\tau s + 1).X(s) = KT(s)$$

$$\boxed{\frac{X(s)}{T(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}}$$

Montagem da Escala do Termômetro

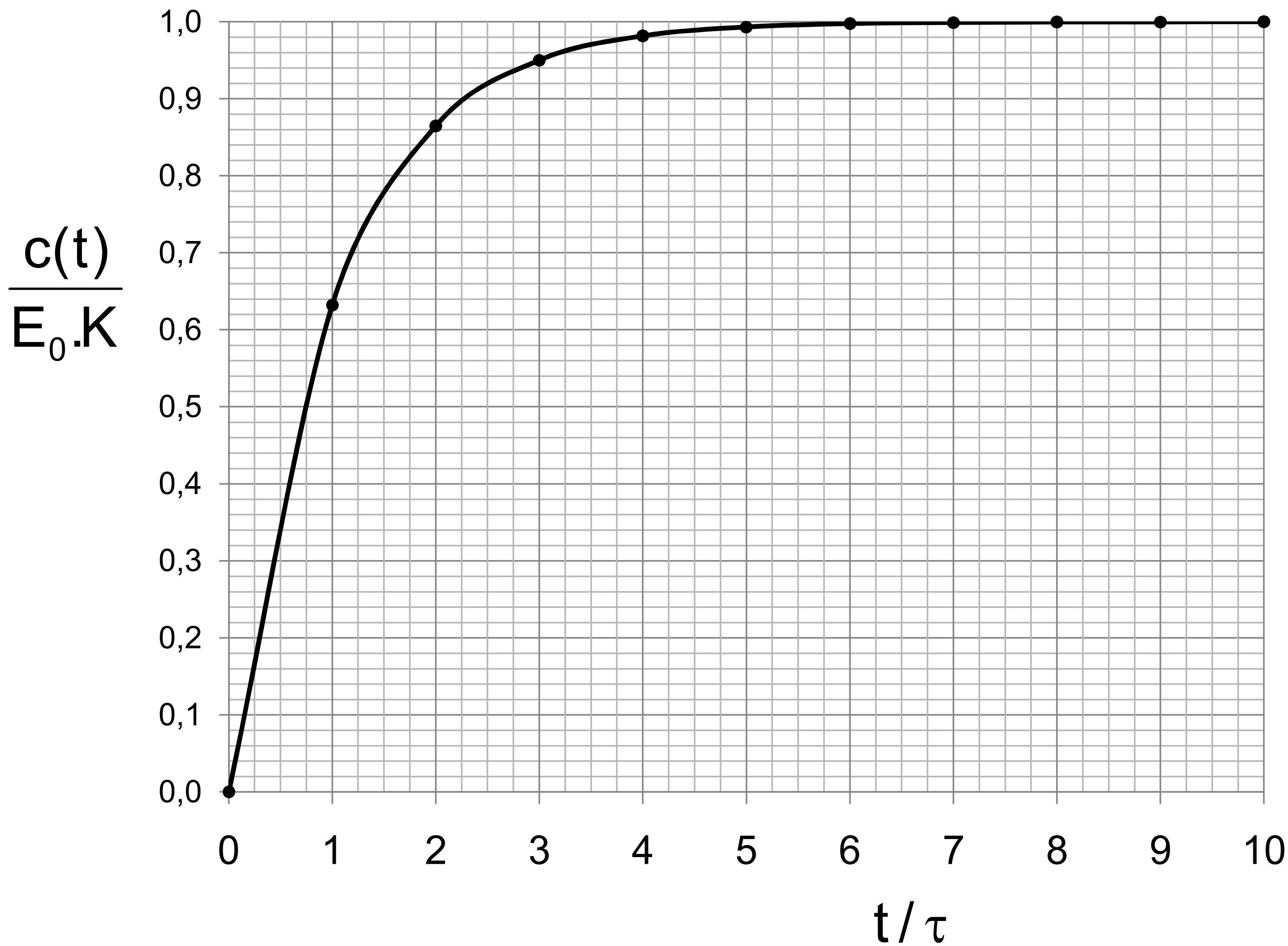
$$T_m = \frac{1}{K} x = T$$

A) Resposta a função degrau

A função degrau representa um aumento (ou diminuição) brusca da grandeza a ser medida (sinal de entrada) pelo instrumento, $e(t) = E_0.1(t)$, que, após a variação inicial permanece constante.

A transformada de Laplace da função degrau é $E(s)=E_0/s$, portanto, a medição do instrumento será, para condições iniciais nulas :

$$C(s) = \frac{E_0}{s} . \frac{K}{\tau.s + 1} \quad \text{ou} \quad c(t) = E_0.K.(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{ou} \quad \frac{c(t)}{E_0.K} = 1 - e^{-t/\tau}$$


1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
$\frac{c(t)}{E_0.K}$
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
t / τ

Define-se o erro de medida dinâmica, neste caso, como sendo:

$$e_m = E_0 - \frac{c(t)}{K} \qquad = E_0 - E_0(1 - e^{-t/\tau}) \qquad \frac{e_m}{E_0} = e^{-t/\tau}$$

$\frac{t}{\tau}$	$\frac{c(t)}{E_0.K}$	$\frac{e_m}{E_0}$	$\frac{e_m}{E_0}$ (%)
0	0,000	1,000	100,0
1	0,632	0,368	36,8
2	0,865	0,135	13,5
3	0,950	0,050	5,0
4	0,982	0,018	1,8
5	0,993	0,007	0,7
10	0,99995	0,00005	0,005

A tabela mostra que para obter uma medida com 0,7% de precisão de um instrumento de primeira ordem deve-se “aguardar” cinco vezes o valor da constante de tempo (após a variação da grandeza a ser medida).

Ou, em outra condição, o tempo de espera para uma medição com precisão melhor do que 5% é de três vezes a constante de tempo ou mais.

B) Resposta em frequência

$$\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{K}{\tau.(j\omega)+1} \qquad \frac{C(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{K}{\tau.j\omega+1}.\frac{\tau.j\omega-1}{\tau.j\omega-1}$$

$$\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{K(\tau.j\omega-1)}{(-1)(\tau\omega)^2-1} = \qquad \frac{C(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{K(1-j\tau\omega)}{(\tau\omega)^2+1} = \frac{K}{(\tau\omega)^2+1} + \frac{-K\tau\omega}{(\tau\omega)^2+1}j$$

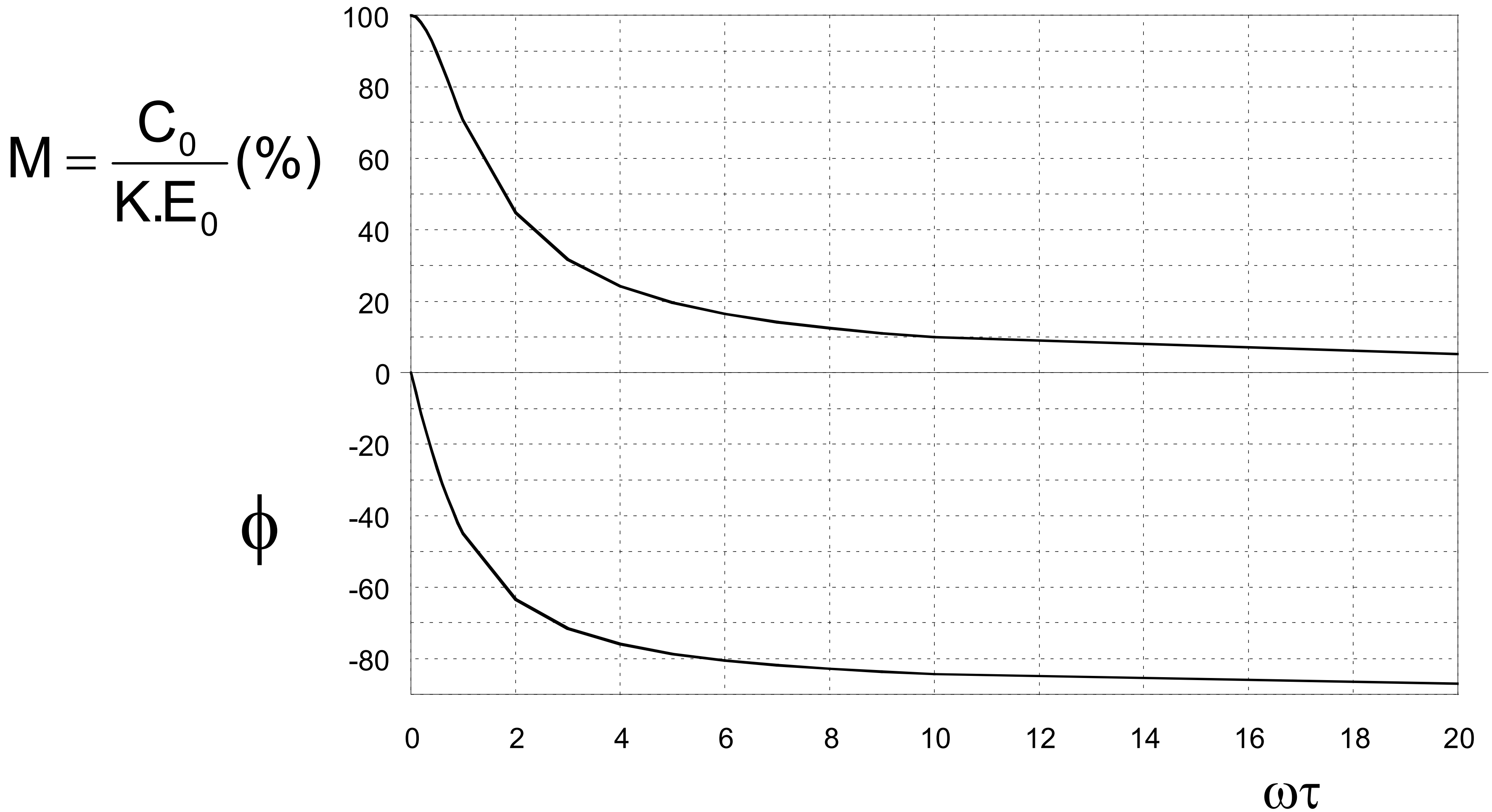
$$M^2 = \left[\frac{K}{(\omega\tau)^2+1}\right]^2 + \left[\frac{-K\omega\tau}{(\omega\tau)^2+1}\right]^2 \qquad M^2 = K^2.\frac{1+(\omega\tau)^2}{\left[(\omega\tau)^2+1\right]^2} = K^2\frac{1}{(\omega\tau)^2+1}$$

$$\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{K}{\tau.(j\omega)+1} = \frac{K}{\sqrt{(\omega\tau)^2+1}}\angle[\tan^{-1}(-\omega\tau)] = \frac{C_0}{E_0}\angle\phi$$

$$\boxed{\frac{C_0}{K.E_0} = \frac{1}{\sqrt{(\omega\tau)^2+1}}}$$

$$\frac{C_0}{K.E_0} = \frac{1}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}}$$

$$\phi = \tan^{-1}(-\omega\tau)$$



Exemplo: Determine a resposta em freqüência de um instrumento de primeira ordem com constante de tempo igual a 0,2 s e sensibilidade estática igual a 1, quando sujeito a uma entrada do tipo E(t) = sen(2t) + 0,3 sen(20t).

A resposta em freqüência do instrumento será a soma das respostas aos sinais de entrada (princípio da superposição de sistemas lineares) :

$$\left|\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)}\right|_{\omega=2} = \left|\frac{K}{\tau.j\omega+1}\right|_{\omega=2} \quad \text{e} \quad \left|\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)}\right|_{\omega=20} = \left|\frac{K}{\tau.j\omega+1}\right|_{\omega=20}$$

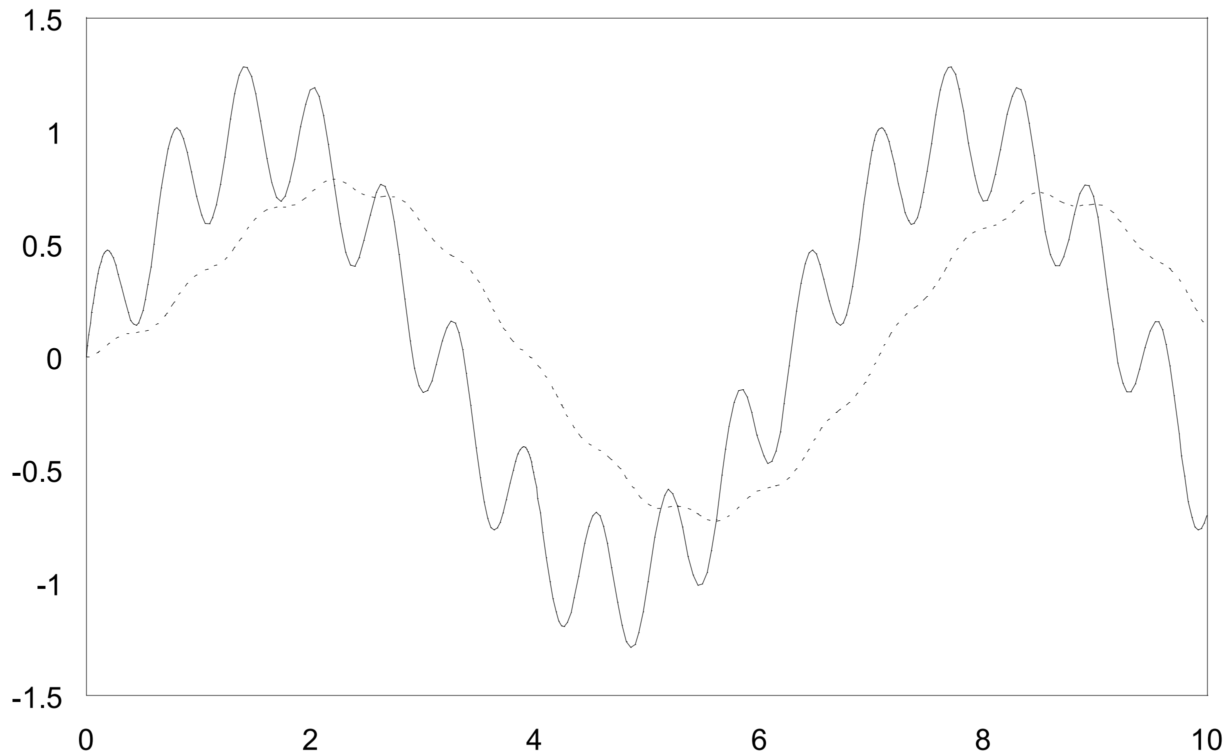
$$\boxed{\left.\left|\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)}\right|\right|_{\omega=2} = \frac{1}{\sqrt{(2x0{,}2)^2+1}} \angle\,[\tan^{-1}(-2x0{,}2)]}$$

$$\boxed{\left.\left|\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)}\right|\right|_{\omega=20} = \frac{1}{\sqrt{(20x0{,}2)^2+1}} \angle\,[\tan^{-1}(-20x0{,}2)]}$$

$$\boxed{\left.\left|\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)}\right|\right|_{\omega=2} = 0{,}928\angle(-21{,}8) \quad \text{e} \quad \left.\left|\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)}\right|\right|_{\omega=20} = 0{,}242\angle\,(-75{,}9)}$$

$$C(t) = (1)\,0{,}928\ \text{sen}(2t - 21{,}8) + (0{,}3)\,0{,}242\ \text{sen}(20t - 75{,}9)$$

(em regime permanente)



Instrumento de segunda ordem

$$a_2 \frac{d^2c(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) = b_0 e(t) \quad \text{ou} \quad \frac{a_2}{a_0}\frac{d^2c(t)}{dt^2} + \frac{a_1}{a_0}\frac{dc(t)}{dt} + c(t) = \frac{b_0}{a_0} e(t)$$

$$K = \frac{b_0}{a_0} \qquad = \text{ sensibilidade estática}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \qquad = \text{freqüência natural, rd/s}$$

$$\zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \qquad = \text{coeficiente de amortecimento}$$

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2c(t)}{dt^2}+\frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{dc(t)}{dt}+c(t)=K.e(t)$$

A transformada de Laplace da equação acima é:

$$\frac{1}{\omega_n^2}s^2.C(s)+\frac{2\zeta}{\omega_n}s.C(s)+C(s)=K.E(s)$$

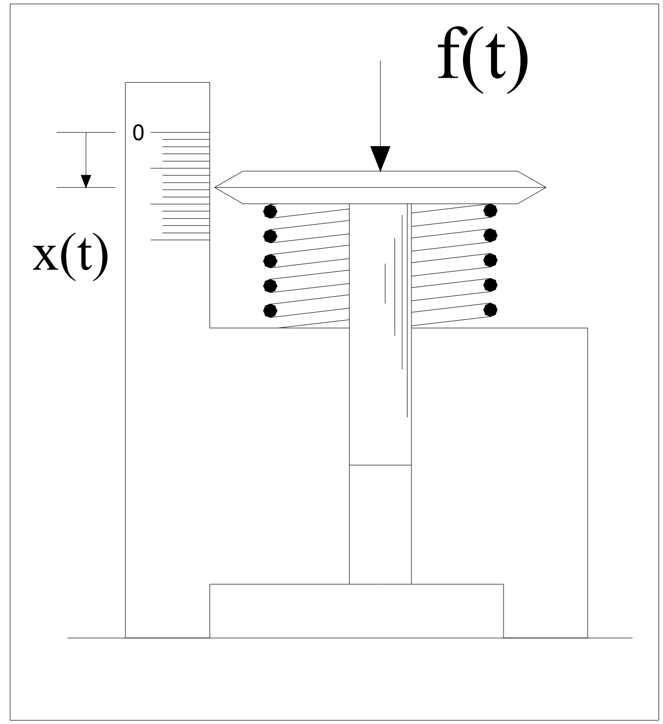
Re-arranjando a equação:

$$\frac{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}{\omega_n^2}.C(s)=K.E(s)$$

Obtemos a função de transferência :

$$\frac{C(s)}{E(s)}=K\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n.s+\omega_n^2}$$

Exemplo: Balança de mola (ou dinamômetro)



$$M_O a(t) = M_O \frac{d^2x(t)}{dt^2} = F_{res}(t)$$

$$M_O \frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(t) - B_A \frac{dx(t)}{dt} - K_M.x(t)$$

$M_O =$ Massa do prato e da haste

$B_A =$ Coeficiente de atrito entre haste e parte fixa

$K_M =$ Constante da mola

$$M_O \frac{d^2x(t)}{dt^2} + B_A \frac{dx(t)}{dt} + K_M.x(t) = f(t)$$

$$M_O \frac{d^2x(t)}{dt^2} + B_A \frac{dx(t)}{dt} + K_M.x(t) = f(t)$$

A transformada de Laplace da equação acima é:

$$M_O s^2.X(s) + B_A s.X(s) + K_M X(s) = F(s)$$

Re-arranjando a equação:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{M_O s^2 + B_A s + K_M}$$

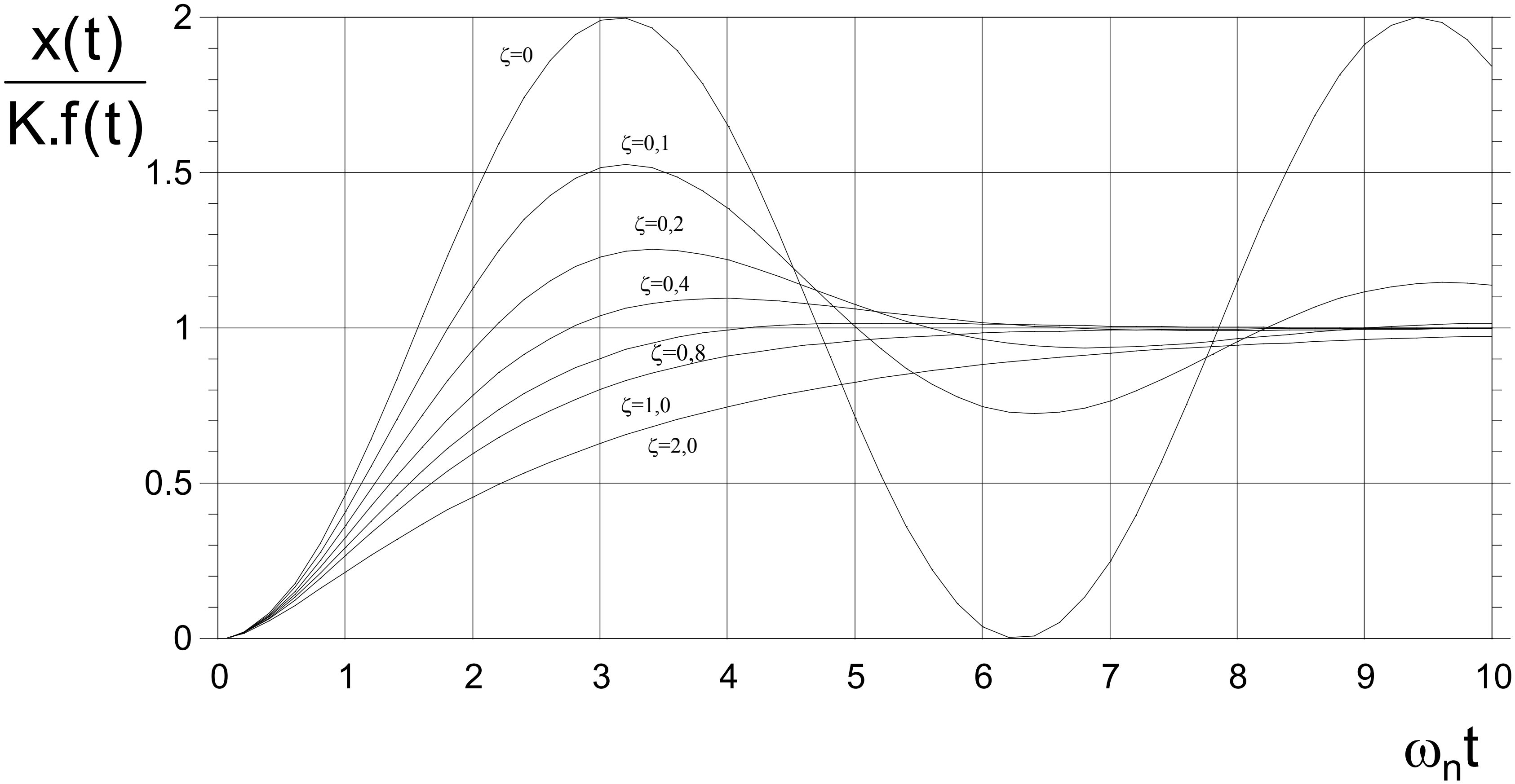
$$\frac{C(s)}{E(s)} = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n.s + \omega_n^2}$$

$$K = \frac{1}{K_M} = \text{sensibilidade estática}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_M}{M_O}} = \text{freqüência natural, rd/s}$$

$$\zeta = \frac{B_A}{2\sqrt{K_M M_O}} = \text{coeficiente de amortecimento}$$

A) Resposta a função degrau



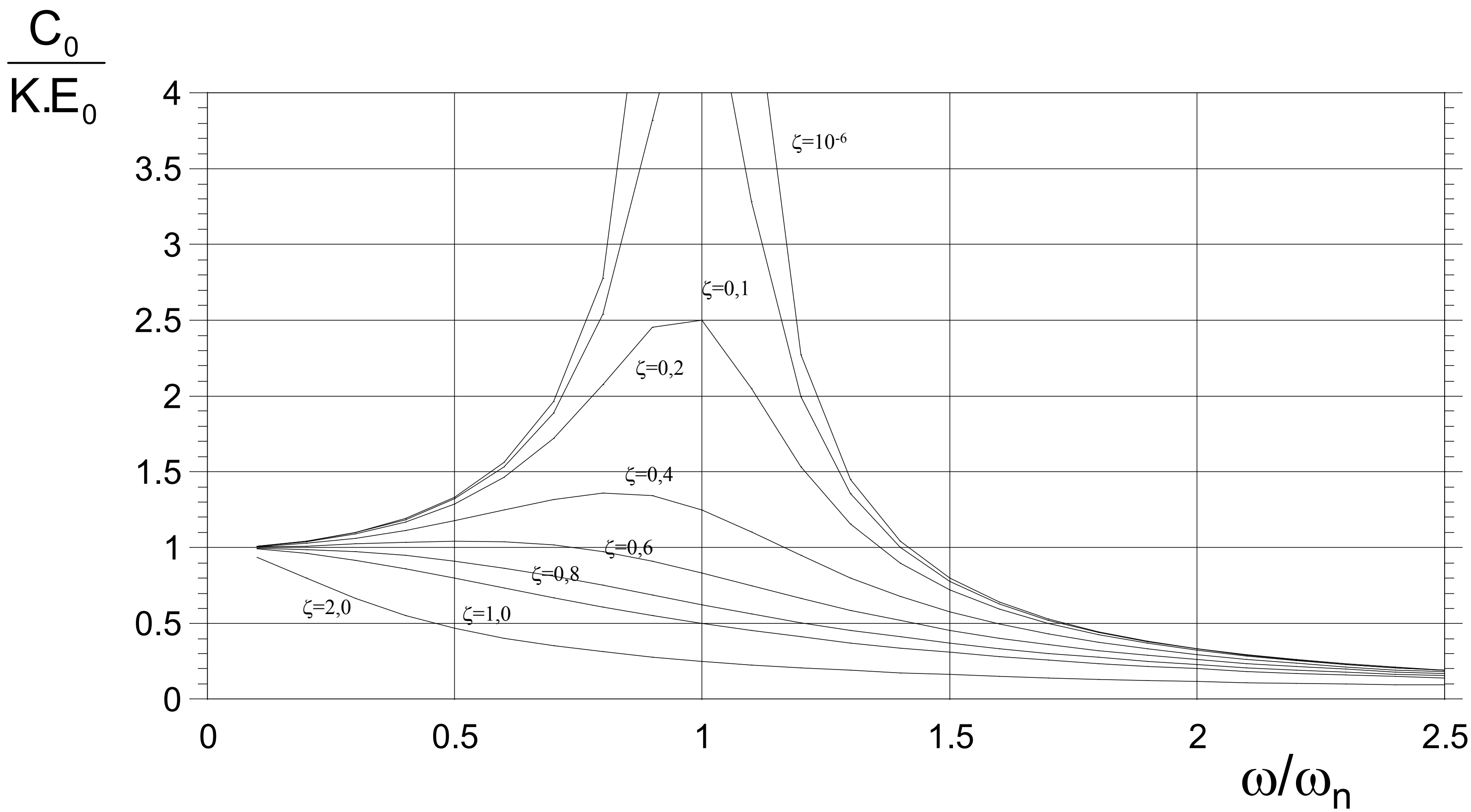
B) Resposta em freqüência

A função de transferência senoidal para instrumento de segunda ordem será:

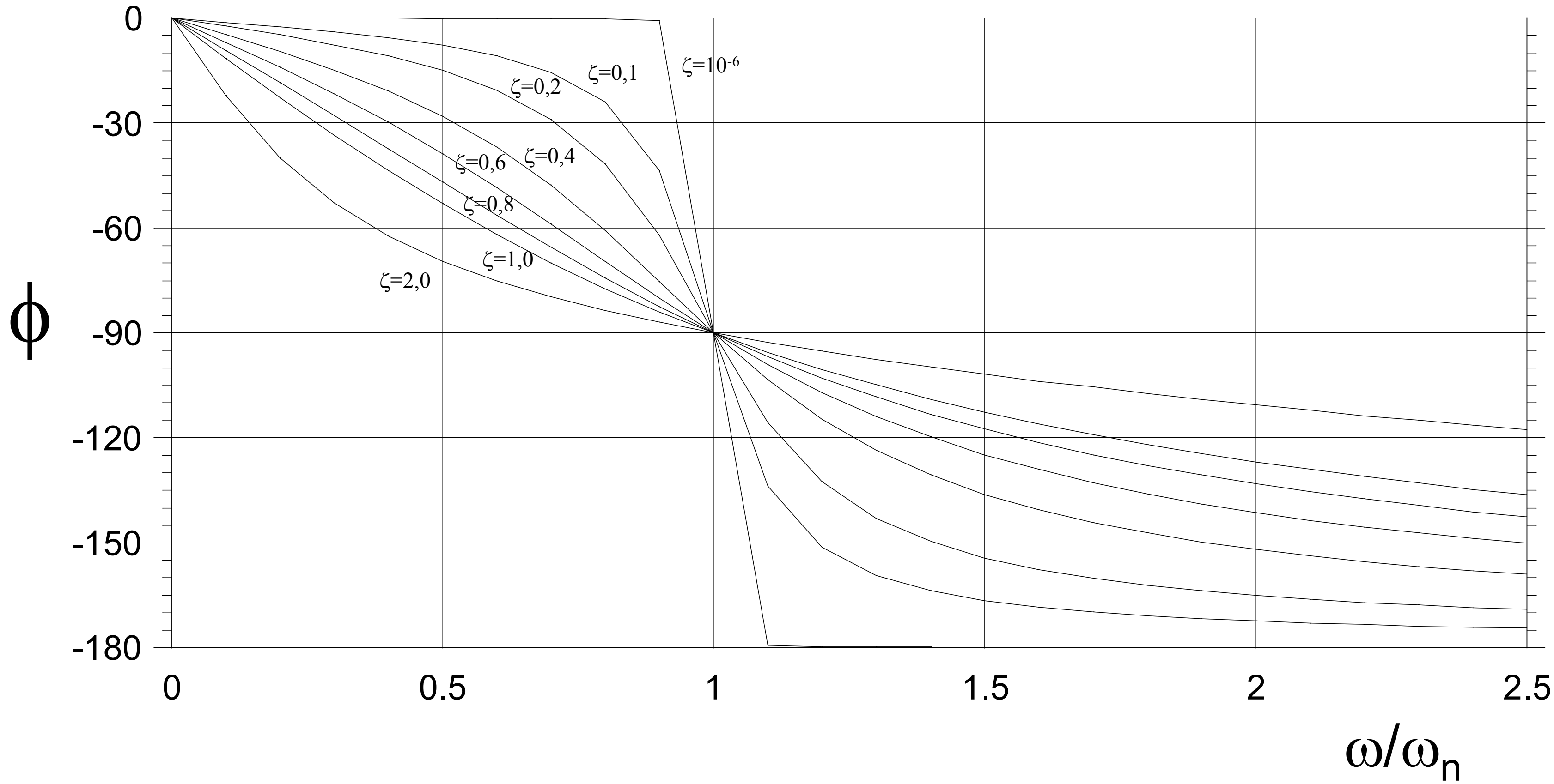
$$\frac{C(j\omega)}{K.E(j\omega)} = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2.\zeta.\omega_n.(j\omega) + \omega_n^2}$$

$$\frac{C(j\omega)}{K.E(j\omega)} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_n)^2}} \angle \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta}{\omega/\omega_n - \omega_n/\omega}\right)$$

Relação entre amplitude de saída (dividida pela sensibilidade estática) e entrada em função da relação frequência de entrada e frequência natural:



ângulo de fase entre entrada e saída em função da relação frequência de entrada e frequência natural:



Os gráficos anteriores mostram que o instrumento de segunda ordem tem comportamento semelhante ao de primeira ordem para coeficientes de amortecimento maior ou igual a 1.

Esta semelhança deixa de existir para valores menores que 1, fazendo com que o instrumento tenha uma resposta em ressonância M (módulo da relação saída / entrada) $\rightarrow \infty$ quando $\omega \rightarrow \omega_n$ para $\zeta \rightarrow 0$.

Quando o instrumento tem pouco amortecimento e quando a freqüência da grandeza a ser medida se aproxima da freqüência natural do instrumento, existirá ressonância.