# O Ensino da Matemática

## Modelagem Matemática no Ensino Fundamental

Modelagem Matemática é acima de tudo uma perspectiva, algo a ser explorado, o imaginável e o inimaginável. A Modelagem Matemática é livre e espontânea, ela surge da necessidade do homem em compreender os fenômenos que o cercam para interferir ou não em seu processo de construção.

A modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda a simulação de sistemas reais a fim de prever o comportamento dos mesmos, sendo empregada em diversos campos de estudo, tais como física, química, biologia, economia e engenharias. Ou seja, modelagem matemática consiste na arte (ou tentativa) de descrever matematicamente um fenômeno.

Além desses aspectos a Modelagem matemática pode ser utilizada para o Ensino de Matemática, nesse sentido, a modelagem é concebida como uma estratégia de ensino. Para Costa (2018) Modelagem pode ser compreendida como uma metodologia de ensino que possibilita ao estudante abordar conteúdos matemáticos a partir de fenômenos de sua realidade, e tem como objetivo explicar matematicamente situações do cotidiano, das mais diferentes áreas da Ciência, com o propósito de educar matematicamente. Ela permite uma inversão do “modelo comum” de ensino, visto que, por meio da modelagem selecionam-se primeiramente os problemas e deles emergem os conteúdos matemáticos, de modo a resolvê-los.

Para quem utiliza essa metodologia de ensino fica perceptível que sua principal característica é promover situações em que os estudante a assimile conhecimentos matemáticos a partir de situações reais. No entanto, há diferentes concepções sobre como aplicar a Modelagem no ensino.

Para Costa (2016) Existem dois modos para realizar a modelagem em sala de aula, uma é que os fenômenos estudados devem partir dos alunos e o outro que esses podem partir do professor (e/ou) alunos, no entender desse autor existem pontos positivos e negativos em cada uma das escolhas. No caso da escolha do tema gerador partindo do aluno entende-se que ele se sentirá mais envolvido no processo de ensino-aprendizagem, pois o tema partiu de suas escolhas, mas entende-se que nesse caso o tema pode gerar uma matemática que não é próxima ao conhecimento da turma.

Já a escolha partindo do professor o tema gerador é conhecido por ele e deste modo, espera-se que o conceito matemático a ser ensinado seja próximo aos conhecimentos dos estudantes, mas por a escolha ter partido do professor os estudantes podem não se envolver tanto na realização da atividade. Entende-se que com a o ensino na perspectiva da modelagem matemática não existe mais um currículo neutro, descontextualizado e sem significado, pois ele parte de fenômenos presente na realidade do estudante, nesse caso o ensino e constantemente reconstruído pelos professores e estudantes.

Sadovsky (2010, p. 103) considera que frequentemente os professores afirmam que “a matemática está em toda parte” para convencer seus alunos da importância de seu estudo. Embora seu estudo seja, sim, relevante, a Matemática não é visível em toda parte. A frase “soa” tão distante da experiência dos estudantes, que dificilmente será capaz de motivá-los de alguma maneira interessante para o ensino.

Assim acredita-se que com a modelagem podemos ensinar Matemática de modo que os alunos percebam a matemática no seu cotidiano, deste modo, eles podem perceber que realmente a matemática está em toda parte.

Modelagem Matemática está diretamente relacionada com a resolução de problemas e com os procedimentos. O fim da Modelagem é ter um modelo matemático que seja a solução do problema inicial. Na Educação Básica, a Modelagem é vista como uma alternativa pedagógica na qual é utilizada uma situação problema real ou da própria Matemática. Alguns aspectos são importantes no desenvolvimento dos trabalhos com modelagem: investigação autônoma (trabalho em grupo), ciclo de modelagem e temas do mundo real. A ideia é fazer modelagem para aprender matemática, ou seja, os Modelos Matemáticos precisam ser significativos com situações-problemas úteis e possíveis de serem resolvidas e discutidas.

Dentre as diferentes formas e métodos de modelagem tem-se a modelagem via autômatos celulares e equações diferenciais, parciais ou ordinárias. A modelagem matemática via equações diferenciais tem um papel de enorme destaque, visto que tal técnica tem sido utilizada para modelar fenômenos desde o século XVII por Malthus e Verhulst,no final dos anos 1700. Então, pode-se dizer que um modelo matemático é desenvolvido para simular a realidade usando a linguagem matemática.

Os modelos matemáticos se subsidiam, por exemplo, das leis da física (como as leis de Kirchhoff para sistemas eletricos e as leis de Newton para mecânicos) ou dados experimentais.

Frequentemente, os modelos atingem grau de sofisticação suficiente para justificar ferramentas computacionais, envolvendo sistemas de equações diferenciais. Softwares como MATLAB e Scilab contam com recursos focados nas soluções de tais modelos.

**Metodologia para estudo de um modelo matemático**

A modelagem de um fenômeno via equações diferenciais é, normalmente, feita da seguinte forma: através da simples observação conseguem-se informações sobre as taxas de variação do fenômeno (que do ponto de vista matemático são derivadas), escreve-se a equação que relaciona as taxas de variação e a função, isto é, a equação diferencial associada e, a partir da solução desta equação tem-se uma possível descrição do fenômeno.

Então, tal modelo matemático será também composto por parâmetros (constantes), que são intrínsecas ao sistema a ser estudado; variáveis que afetam o sistema, porém o modelo não foi designado para estudar seu comportamento (variáveis independentes) e as variáveis as quais o modelo foi designado para estudar (variáveis dependentes). Quando o sistema em questão busca retratar um fenômeno que consiste na interação entre duas ou mais entidades, então a modelagem é feita através de um sistema de equações diferenciais. O modelo Lotka-Volterra (ou presa-predador), por exemplo, desenvolvido na década de 1920, é dado por:

$$\begin{cases} x'(t) = ax + bx(t)y(t) \\ y'(t) = -cy + dx(t)y(t) \end{cases}$$

Em que $a, b, c$ e $d$ são os parâmetros, $x(t)$ e $y(t)$ são as variáveis dependentes, respectivamente a população de presas e predadores e $t$ é a variável independente, o tempo neste caso. Para se estudar um modelo matemático de equações diferenciais, de uma maneira geral, devem ser seguidos alguns passos:

Obtenção dos pontos de equilíbrio:

Consiste em fazer $x'(t) = 0$ e $y'(t) = 0$, resolver o sistema resultante e obter os valores de $x(t)$ e $y(t)$ o equilíbrio, ou seja, quanto as respectivas taxas de variação são zero;

Obter a Matriz jacobiana do sistema;

Calcular a Matriz jacobiana nos pontos de equilíbrio obtidos acima;

Obter os autovalores da matriz e fazer a seguinte análise de estabilidade:

Para autovalores reais, o ponto será estável se todos os autovalores forem menores que zero, instável se todos forem maiores que zero e ponto cela se apresentarem ambas as situações;

Para autovalores complexos, o ponto será uma espiral estável se os autovalores tiverem a parte real negativa, espiral instável se a parte real for positiva e um centro se a parte real for nula.

Analisar o retrato de fase do sistema.

## Por que fazer Modelagem Matemática?

Podemos enumerar os diversos benefícios de trabalharmos com Modelagem Matemática:

1) Motivação dos alunos e do próprio professor

2) Facilitação da aprendizagem. O conteúdo matemático passa a ter significação, deixa de ser abstrato e passa a ser concreto.

3) Preparação para futuras profissões nas mais diversas áreas do conhecimento, devido a interatividade do conteúdo matemático com outras disciplinas.

4) Desenvolvimento do raciocínio, lógico e dedutivo em geral.

5) Desenvolvimento do aluno como cidadão crítico e transformador de sua realidade.

6) Compreensão do papel sócio-cultural da matemática, tornando-a assim, mais importante.

Se a Modelagem Matemática procura modelar um determinado fenômeno da realidade com o objetivo de compreender este fenômeno a Etnomatemática se faz presente, pois ela trata de um conjunto de saberes que um determinado grupo cultural possui com um objetivo em comum.

Deve ser criativo, motivador e acima de tudo deve assumir a postura de um mediador entre o saber comum e o saber matemático, fazendo com que o aluno passe a ser um agente ativo no processo de construção do saber.

A Modelagem Matemática é uma metodologia alternativa para o ensino de Matemática que pode ser utilizada tanto no ensino fundamental como no ensino médio. A partir de conceitos gerais, procura –se mostrar a importância da Matemática para o conhecimento e compreensão da realidade onde se vive. Uma forma de avaliar se a Modelagem Matemática é eficiente no processo de ensino-aprendizagem é estabelecer um paralelo entre o ensino tradicional e o ensino através da Modelagem Matemática, abordando aspectos como a pedagogia adotada, a criatividade, o interesse pelo estudo de Matemática, a motivação e entusiasmo por parte dos alunos,e a avaliação do que eles realmente aprenderam com a Modelagem Matemática, levando o professor a refletir sobre a sua metodologia de ensino da matemática.

É evidente que a Modelagem Matemática não deve ser usada como uma única metodologia de ensino, o professor no exercício das suas atividades, deve sempre procurar a melhor metodologia de ensino da matemática, como por exemplo: jogos, brincadeiras, a história da matemática, metodologia dos três momentos, resolução de problemas, enfim usar todos os seus recursos para obter o melhor resultado possível no ensino da matemática.

Devido ao grande avanço das tecnologias informáticas muitas das atividades do nosso cotidiano passaram a ser feitas por máquinas, com os computadores surgiu, por exemplo, a “Era da Informática” onde as informações se difundiram em grande escala revolucionando o modo de vida da humanidade.

Com toda esta revolução ocasionada pela informática, os conceitos matemáticos tornaram-se implícitos, pois os programas de computação são capazes de realizar cálculos em uma fração de segundo, o que manualmente levariam horas para o ser humano resolver.

## Modelagem matemática no ensino fundamental

O interesse em utilizar a Modelagem Matemática como estratégia de ensino nas aulas de Matemática com alunos do Ensino Fundamental baseia-se na busca da melhoria da qualidade de ensino desta disciplina escolar ofertada nestas séries.

Os alunos que ingressam nas séries iniciais do Ensino Fundamental enfrentam um período de transição na vida escolar, antes acostumados a uma rotina diferente, com menos professores, atendimento diferenciado e metodologia adequada para a idade, agora se vêem diante de disciplinas separadas com professores diferentes.

Esta fase caracteriza-se como um rito de passagem entre a infância e a adolescência, e, portanto, causa anseios e angústias nos alunos, que podem apresentar dificuldades em entender conceitos matemáticos. Estas dificuldades de adaptação podem ser agravadas por metodologias inadequadas para um período de grandes mudanças pelo qual passam os estudantes.

O que caracteriza uma Modelagem Matemática, segundo Biembengut e Hein (2003), é o fato de o problema advir de uma situação real e que depois, de formular e resolver um modelo que solucione o problema, este modelo possa ser aplicado, também, como suporte para outras aplicações.

Os procedimentos que identificam os passos da modelagem, segundo Biembengut e Hein (2003) são:

a) Interação: esta etapa é identificada pela pesquisa e o reconhecimento da situação-problema. Geralmente, o problema surge em outras áreas do conhecimento, a investigação é fundamental para a familiarização do tema e a seleção de dados para o processo de resolução do problema.

b) Matematização: este período proporciona um desafio maior para quem vai desenvolver a pesquisa e subdivide-se em formulação e resolução do problema, traduzindo, através da linguagem matemática a situação real para um modelo matemático que poderá solucionar o problema inicial.

c) Modelo matemático: esta etapa consiste em validar ou não a solução encontrada para o problema, verificando o grau de confiabilidade na sua utilização e a sua aplicação em outras situações análogas.

- Pontos Negativos

1. O tempo que o professor dispõe em sala de aula para a realização das atividades. Uma vez que o professor trabalhando com um modelo ele gasta muito mais tempo do que dispõe;

2. O excesso no número de aluno, que acaba não dando condições para que o professor execute a modelagem de forma positiva, pois é no momento da construção do modelo que o aluno passa a ver vários pontos interessantes, até então por ele desconhecido e é esse o momento do professor estar abrangendo a possibilidade de interação entre vários conteúdos e mostrar ao aluno que isso faz parte do seu cotidiano;

3. A falta de capacitação do próprio professor em estar utilizando esta tendência.

- Pontos Positivos

1. A possibilidade real da aprendizagem da matemática e da sua aplicação, a partir da interação com a realidade;

2. O aluno como pesquisador;

3. A interação entre professor e aluno por meio de pesquisa.

A modelagem nos ensinos Fundamental e Médio é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante é caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado. Com a modelagem o processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno como seu ambiente natural.

A Matemática está presente na vida das pessoas, no trabalho e em várias ações diárias. Porém, percebe-se no âmbito escolar, dos ensino Fundamental e Médio, que a Matemática é conceituada como uma disciplina de difícil compreensão e que não desperta o gosto dos alunos. Esse problema pode ser entendido pela falta de ações pedagógicas que atendam ao interesse dos alunos e que as façam estabelecer relações entre a Matemática aprendida em sala de aula e seus usos no cotidiano.

Em outras palavras, pode-se dizer que o ensino da Matemática nos ensinos Fundamental e Médio, hoje, é pouco motivador, pois se apresenta associado às práticas de reprodução de procedimentos matemáticos, o que não é atraente aos alunos. Considerando esses aspectos, percebe-se que há necessidade de inovação em relação às metodologias de ensino da Matemática nos ensinos Fundamental e Médio.

A modelagem matemática pode ser uma metodologia que corresponda aos interesses dos alunos, pois possibilita um aprendizado além do uso de apostilas e livros didáticos, podendo oferecer aos alunos uma forma mais dinâmica e lúdica de aprender os conhecimentos matemáticos. Assim, a modelagem matemática é uma maneira, no mínimo relevante, a ser considerada em âmbito escolar para a construção e elaboração de conceitos matemáticos no ensino fundamental.

Um teatro, com capacidade para 100 pessoas, fechou um contrato com uma escola para exibição de um espetáculo. De acordo com o contrato, os termos principais foram:

– O valor de 20 U.M. por aluno se todos os lugares forem vendidos;

– Se não forem vendidos todos os lugares, o preço por aluno deve aumentar 2 U.M.

O dono do teatro quer saber: quantos lugares devem ser vendidos para que ele obtenha receita máxima?

Resolução:

a) Sem usar a modelagem matemática;

b) Usando a modelagem matemática.

Usando a modelagem matemática

Quando você, caro leitor (ou aluno), estudou a equação do 1º grau, viu que dois pontos determinam uma reta. Na coluna de pp e qq vamos escolher os seguintes pontos:

$$\underset{x_0 \quad y_0}{\overset{q \quad p}{(100,\ 20)}} \qquad \text{e} \qquad \underset{x_1 \quad y_1}{\overset{q \quad p}{(99,\ 22)}}$$

A fórmula dá a equação do 1º grau:

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Pode-se escolher pp em função de qq ou qq em função de pp. Como o dono do teatro quer saber quantos lugares devem ser vendidos para que ele obtenha receita máxima, logo, vamos encontrar o preço (pp) em função da quantidade (qq). A fórmula da equação do 1º grau fica:

$$\frac{p - p_0}{p_1 - p_0} = \frac{q - q_0}{q_1 - q_0}(1)$$

Substituindo os valores de cada ponto na (1)(1), obtém-se:

$$\frac{p - 20}{22 - 20} = \frac{q - 100}{99 - 100}$$
$$(p - 20).(99 - 100) = (22 - 20).(q - 100)$$
$$(p - 20).(-1) = (2).(q - 100)$$
$$20 - p = 2q - 200$$
$$p = -2q + 220(2)$$

Como a receita (RR) é igual ao preço (pp) vezes quantidade (qq), ou seja, R=p.qR=p.q, logo multiplicando ambos os membros da (2)(2) por qq, obtém-se:

$$p.q = -2q.q + 220.q$$
$$R = -2q^2 + 220.q(3)$$

A equação (3) é o modelo matemático para o problema em questão.

Já que a equação (3)(3) é do 2º grau, logo, seu gráfico é uma parábola. Como o coeficiente de q^{2}q2 é negativo, então, a receita total atinge o máximo no vértice da parábola. Como o vértice da parábola é dado por:

$$V_q = \frac{-b}{2.a}, \text{ e com } a = -2 \text{ e } b = 220, \text{ logo:}$$
$$V_q = \frac{-220}{2.(-2)}$$
$$V_q = 55$$

Portanto, $q = 55$.

Substituindo $q = 55$ na $(3)$, obtêm-se:

$$R(55) = -2.(55)^2 + 220.(55) = -2.(3025) + 220.(55) = -6050 + 12100 = 6050 \text{ U.M.}$$

Portanto, o dono do teatro deve vender 5555 lugares para obter a maior receita; a qual é de 60506050 U.M.

Resultado que bate com o que foi encontrado sem usar a modelagem matemática. Só que o resultado obtido com a modelagem matemática, em termo de ensino-aprendizagem, é muito mais importante, haja vista que usando a modelagem matemática o aluno aplica o que aprendeu sobre a equação do 1º grau.

O cenário educacional das últimas décadas vem assumindo novos contornos, tendo desencadeado inúmeras discussões sobre as necessárias mudanças nos processos de ensino e de aprendizagem, face às muitas transformações ocorridas nas esferas sociais, econômica, política, cultural, científica e tecnológica, as quais impõem uma diversidade de demandas que não estão sendo atendidas a contento no âmbito escolar.

A partir do pressuposto de que a finalidade primeira da educação volta-se para a necessidade de promover mudanças nos indivíduos e nos ambientes de aprendizagem, com vistas a favorecer o desenvolvimento integral do homem e da sociedade, torna-se necessário repensar os moldes nos quais vêm se desenvolvendo as ações educativas, no intuito de buscar o fortalecimento de uma visão mais participativa, crítica e reflexiva dos diferentes atores sociais envolvidos no processo ensino-aprendizagem. Neste sentido, esta pesquisa pretende compreender as interações discursivas entre professor-aluno e aluno-aluno nas séries iniciais a partir do ambiente de Modelagem Matemática.

A modelagem matemática, de uma forma simples, resume-se à criação de um modelo matemático (um padrão ou fórmula matemática) para explicação ou compreensão de um fenômeno natural. Esse fenômeno pode ser de qualquer área do conhecimento. Atualmente, podemos perceber o uso da modelagem matemática na criação de bovinos, produção de materiais para construção civil, movimentação de animais, teoria da decisão, crescimento de cidades, controle biológico de pragas e outros.

O atual papel da educação matemática é formar cidadãos aptos para o convívio em sociedade, respeitando as diferenças, agindo de forma crítica e reflexiva diante das situações cotidianas. Através do uso da modelagem matemática na sala de aula podemos trabalhar a interdisciplinaridade, a transversalidade, mostrando ao aluno como a matemática pode ser útil em sua vida fora do ambiente escolar e como ela interage com as demais áreas do conhecimento. O aluno passa a perceber a importância da matemática para a compreensão de fenômenos naturais, como é possível “prever” alguns acontecimentos utilizando fórmulas e modelos e isso acaba despertando seu interesse pela ciência.

A introdução da modelagem matemática pode ser feita através da resolução de problemas, trazendo para dentro de sala a realidade do aluno, uma vez que a matemática só fará sentido para os educandos quando ela se tornar significativa e prazerosa. As diversas situações-problemas farão com que a capacidade de interpretação melhore, o aluno assuma uma posição crítica ao tentar resolvê-las e consiga analisar que pode haver mais de uma solução e que há vários caminhos para chegar até elas. Observe que isso é essencial para a solução de situações que são vividas por todos nós diariamente. Precisamos de cidadãos matematicamente alfabetizados que, ao se depararem com seus problemas econômicos, no comércio, na medicina e em outras situações diárias, consigam resolvê-los de forma rápida e precisa.

## A Modelagem matemática como metodologia de ensino e aprendizagem

A Modelagem Matemática tem sido estudada desde os anos 80. Devido o grande avanço das tecnologias, principalmente na área da informática, muitas atividades passaram a ser feitas por máquinas automatizadas. Em virtude disso a matemática passou a não ter mais significado para os alunos. O papel da Matemática na formação dos alunos, desde então, vem sendo discutida.

A matemática é considerada, fundamental para a formação do ser humano racional. As atividades em que a Modelagem Matemática é utilizada para trabalhar os conceitos geométricos tendo como suporte a construção de caixas de embalagens, de plantas, de maquetes, cálculo da forma ótima, etc. (a nível de ensino fundamental).

A modelagem matemática tem como pressuposto que o ensino e a aprendizagem da Matemática podem ser potencializados ao se problematizarem situações do cotidiano.

A Modelagem Matemática é uma metodologia alternativa para o ensino de Matemática que pode ser utilizada tanto no ensino fundamental como no ensino médio. A partir de conceitos gerais, procura–se mostrar a importância da Matemática para o conhecimento e compreensão da realidade onde se vive. Uma forma de avaliar se a Modelagem Matemática é eficiente, é estabelecer um paralelo entre esta e o ensino tradicional, abordando aspectos como a pedagogia adotada, a criatividade, o interesse pelo estudo de Matemática, a motivação e entusiasmo por parte dos alunos, e a avaliação do que eles realmente aprenderam levando o professor a refletir sobre a sua metodologia de ensino.

É evidente que a Modelagem Matemática não deve ser usada como uma única metodologia de ensino. O professor no exercício das suas atividades, deve sempre procurar a melhor metodologia de ensino da matemática, como por exemplo: jogos, brincadeiras, a história da matemática, resolução de problemas entre outras, enfim usar todos os seus recursos para obter o melhor resultado possível no ensino da matemática.

Modelagem Matemática é acima de tudo uma perspectiva, algo a ser explorado, o imaginável e o inimaginável. A Modelagem Matemática é livre e espontânea, ela surge da necessidade do homem em compreender os fenômenos que o cercam para interferir ou não em seu processo de construção.

Na Modelagem Matemática dois pontos são fundamentais: aliar o tema a ser escolhido com a realidade de nossos alunos e aproveitar as experiências extraclasse dos alunos aliadas à experiência do professor em sala de aula.

Alguns benefícios da Modelagem Matemática:

1) Motivação dos alunos e do próprio professor

2) Facilitação da aprendizagem. O conteúdo matemático passa a ter significação, deixa de ser abstrato e passa a ser concreto.

3) Preparação para futuras profissões nas mais diversas áreas do conhecimento, devido à interatividade do conteúdo matemático com outras disciplinas.

4) Desenvolvimento do raciocínio, lógico e dedutivo em geral.

5) Desenvolvimento do aluno como cidadão crítico e transformador de sua realidade.

6) Compreensão do papel sócio-cultural da matemática, tornando-a assim, mais importante.

As grandes descobertas da humanidade surgem da necessidade do homem em resolver determinadas situações-problema do seu dia-a-dia.

A Matemática está presente nas inúmeras atividades humanas podendo relacionar seus conceitos as diversas situações e lugares, tais como: a compra de um lanche durante o intervalo da aula, a localização da casa de um colega e o orçamento doméstico. Ao se trabalhar a matemática escolar com os alunos, percebe-se frequentemente que grande parte deles apresentam dificuldades em relacionar os conteúdos estudados na escola com a realidade enfrentada no seu cotidiano. É preciso desfazer a ideia de que a matemática escolar está desvinculada da mesma utilizada no dia a dia. Para tanto, também é preciso utilizar metodologias que visem associar conteúdo, prática e interesse do aluno.

A Modelagem Matemática, sendo uma metodologia diferenciada, pode despertar o interesse do aluno e ainda possibilitar o real ensino-aprendizagem. Com ela é possível mostrar aos mesmos que os conceitos e procedimentos matemáticos estão presentes em seu dia a dia e são úteis para uma melhor atuação em atividades rotineiras.

A metodologia tradicional contribui para aumentar o desinteresse no aprendizado de matemática. Muitas vezes, a forma como os assuntos são abordados nesta auxilia para que o aluno não se sinta parte integrante do aprendizado ou não vejam relação do conteúdo com o seu cotidiano.

A Modelagem Matemática utilizada como estratégia metodológica nas aulas de matemática, proporciona aos alunos desenvolverem, uma forma diferente de pensar a matemática, isto é possibilita maneiras interessantes de aprender os conteúdos matemáticos propostos em sala, dando a oportunidade de estarem estudando assuntos relacionados à sua vivência.

“O trabalho pedagógico com a Modelagem Matemática possibilita a intervenção do estudante nos problemas reais do meio social e cultural em que vive, por isso, contribui para sua formação crítica”. (PARANÁ 2008, p.65). Assim, a Modelagem Matemática, por ser uma metodologia que busca construir um paralelo entre a matemática escolar com a presente no dia a dia dos alunos, pode transformar-se em uma importante ferramenta para cativar e, consequentemente, proporcionar uma eficácia maior na aprendizagem.

A matemática fornece instrumentos eficazes para compreender e atuar no mundo que nos cerca; ela é uma ferramenta essencial na solução de vários tipos de problemas. Nela são desenvolvidas estruturas abstratas baseada em modelos concretos; além de método, a matemática é um meio de comunicação – uma linguagem formal e precisa – requer uma prática constante de forma clara e universal. O conhecimento matemático faz parte do patrimônio cultural da humanidade porque possui características e procedimentos próprios que também tem evoluído no contexto de outras ciências.

A matemática é componente importante na construção da cidadania, nos conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, e o seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente, procurando desenvolver nos alunos competências para compreender e transformar a realidade. No ensino da matemática destacam-se aspectos básicos como relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figura) e essas representações devem relacionar-se com princípios e conceitos matemáticos, através da “fala” e da “escrita”. A aprendizagem em matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; resultante das conexões entre todas as disciplinas com o cotidiano nos seus diferentes temas.

Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores outros materiais tem um papel importante no processo ensino-aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados à situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em ultima instancia, a base da atividade matemática.

A avaliação é parte integrante do processo de ensino-aprendizagem, ela incide sobre uma grande variedade de aspectos relativos ao desempenho dos alunos como aquisição de conceitos, domínio de procedimentos e desenvolvimento de atitudes.

## Jogos Matemáticos

Os jogos são grandes aliados no ensino da Matemática, pois permitem que os alunos pratiquem os conteúdos de forma interativa, além proporcionar o desenvolvimento do raciocínio.

Os jogos de matemáticas não são apenas jogos simples nos quais são necessários resolver contas ou expressões rapidamente. Muitos deles exigem que o jogador faça isso e também, por exemplo, utilizem um pouco de lógica. Então, aproveite os nossos jogos matemáticos para aprimorar a habilidade do seu cérebro em usar a lógica, trabalhar com números e fazer contas com mais eficiência.

Matemática, porque proporcionam aos alunos resolver problemas de maneira divertida, criando situações de erros e acertos que levam ao aluno a desenvolver sua autonomia. Assim, os professores esperam que os jogos possam tornar suas aulas mais fascinantes e o processo de aprendizagem mais significativo.

Compreende-se que o caráter lúdico dos jogos matemáticos estimula o raciocínio, simulando conflitos, muitas vezes direcionados ou relacionados com seu dia-a-dia, confirmando a importância da formação matemática, não apenas como detentora do pensamento dedutivo, mas também como disciplina formadora de valores e atitudes. Os jogos propiciam o aprimoramento das habilidades matemáticas, mas ao mesmo tempo ajudam a desenvolver a concentração, a solidariedade, autoconfiança, autoestima e a criticidade.

A palavra jogo, do latim joco, significa, etimologicamente, gracejo e zombaria, sendo empregada no lugar de ludus, que representa brinquedo, jogo, divertimento e passatempo.

A palavra matemática tem sua origem na palavra grega μάθημα (mathema) que significa conhecimento, aprendizagem, estudo. Com o tempo, o sentido da palavra tornou-se mais específico e técnico. Atualmente é frequentemente definida como o estudo de padrões, quantidades, estruturas, variações e espaço.

Lista de jogos matemáticos

- ✓ Sudoku
- ✓ Torre de Hanói
- ✓ Ouri
- ✓ Bingo com operações matemáticas
- ✓ Cubo de Rubik
- ✓ Tangran
- ✓ Amarelinha Matemática

**Sudoku**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | | | 7 | | | | |
| 6 | | | 1 | 9 | 5 | | | |
| | 9 | 8 | | | | | 6 | |
| 8 | | | | 6 | | | | 3 |
| 4 | | | 8 | | 3 | | | 1 |
| 7 | | | | 2 | | | | 6 |
| | 6 | | | | | 2 | 8 | |
| | | | 4 | 1 | 9 | | | 5 |
| | | | | 8 | | | 7 | 9 |

Um típico problema de sudoku

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 |
| 6 | 7 | 2 | 1 | 9 | 5 | 3 | 4 | 8 |
| 1 | 9 | 8 | 3 | 4 | 2 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 5 | 9 | 7 | 6 | 1 | 4 | 2 | 3 |
| 4 | 2 | 6 | 8 | 5 | 3 | 7 | 9 | 1 |
| 7 | 1 | 3 | 9 | 2 | 4 | 8 | 5 | 6 |
| 9 | 6 | 1 | 5 | 3 | 7 | 2 | 8 | 4 |
| 2 | 8 | 7 | 4 | 1 | 9 | 6 | 3 | 5 |
| 3 | 4 | 5 | 2 | 8 | 6 | 1 | 7 | 9 |

... e sua solução, marcada em vermelho

Sudoku, por vezes escrito Su Doku (数独, sūdoku?) é um jogo baseado na colocação lógica de números. O objetivo do jogo é a colocação de números de 1 a 9 em cada uma das células vazias numa grade de 9x9, constituída por 3x3 subgrades chamadas regiões. O quebra-cabeça contém algumas pistas iniciais, que são números inseridos em algumas células, de maneira a permitir uma indução ou dedução dos números em células que estejam vazias. Cada coluna, linha e região só pode ter um número de cada um dos 1 a 9. Resolver o problema requer apenas raciocínio lógico e algum tempo. Os problemas são normalmente classificados em relação à sua realização. O aspecto do sudoku lembra outros quebra-cabeças de jornal. Foi criado por Howard Garns, um projetista e arquiteto de 74 anos aposentado.

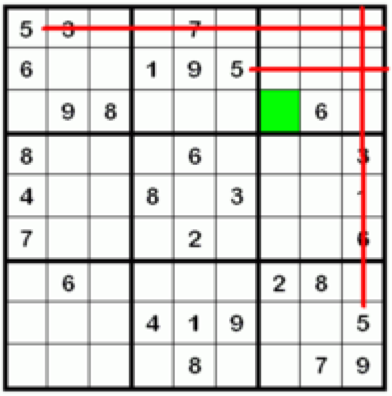
Os numerais no jogo sudoku são usados por comodidade; as relações aritméticas entre numerais são absolutamente irrelevantes (não requer lógica para cálculos matemáticos).

Qualquer combinação de símbolos distintos como letras, formas, ou cores podem ser usadas no jogo sem alterar as regras. Por exemplo, algumas variações usam letras, como Scramblets da Penny Press e Sudoku Words da Knight Features Syndicate. Dell Magazines, o criador do jogo, tem utilizado números para Number Place em suas revistas desde a sua primeira publicação em 1979. Numerais são utilizados através deste artigo.

A atração do jogo é que as regras são simples, contudo, a linha de raciocínio requerida para alcançar a solução pode ser complexa. O sudoku é recomendado por alguns educadores como um exercício para o pensamento lógico. O nível de dificuldade pode ser selecionado para combinar com o público. Existem diversas fontes na internet não ligadas a editoras que disponibilizam os jogos gratuitamente.

Seu formato é mais frequentemente uma grade de 9x9 constituída de sub-grades de 3x3 chamadas de "regiões" (outros termos incluem "caixas" e "blocos"; algumas vezes, o termo "quadrante" é utilizado, apesar de ser um termo impreciso para uma grade de 3x3). Algumas células já contém números, chamadas "números dados" (ou, algumas vezes, "pistas"). O objetivo é preencher as células vazias com um número em cada célula, de maneira que cada coluna, linha e região contenha os números de 1 a 9 apenas uma vez. Na solução do jogo, cada número aparece apenas uma vez em qualquer um dos sentidos ou regiões; daí, o termo sudoku, que significa "únicos números".

## Métodos de solução



A região 3x3 no canto superior direito. O solucionador pode eliminar todas as células vazias no canto superior direito que contenham um 5 nas mesmas colunas ou linhas. Isto deixa apenas uma célula possível (destacada em verde).

A estratégia para a resolução de um sudoku pode ser considerada como uma combinação de três processos: fazer uma varredura visual, fazer marcações e análise.

## Varredura

A varredura é executada no início e durante toda a solução. As varreduras somente têm que ser executadas uma vez entre períodos da análise. A varredura consiste em apenas duas técnicas básicas:

Cruzamento: a varredura das linhas (ou colunas) para identificar que linha em uma região particular pode conter um determinado número por um processo de eliminação. Este processo é repetido então com as colunas (ou linhas). Para resultados mais rápidos, os números são verificados por ordem de frequência. É importante executar sistematicamente este processo, verificando todos os dígitos 1–9.

Contar os números de 1 a 9 nas regiões, linhas e colunas para identificar os números faltantes. Contar baseado no último número descoberto pode fazer com que a busca seja mais rápida. Também pode ser o caso (tipicamente em enigmas mais difíceis) de que a maneira mais fácil de verificar o valor de uma célula individual seja contando no inverso — isto é, fazendo a varredura da região da célula, linha e coluna para identificar os valores que "não podem" ser, a fim de se descobrir o que resta.

Os solucionadores avançados procuram "contingências" ao fazer a varredura — isto é, estreitando a posição de um numeral dentro de uma fileira, coluna, ou região a duas ou três células. Quando estas células todas se encontrarem dentro da mesma fileira (ou coluna) "e" região, elas podem ser usadas para finalidades de eliminação durante as etapas de cruzamento e contar.

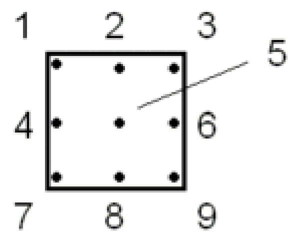
Particularmente os enigmas mais desafiadores podem requerer múltiplas contingências para serem descobertos, talvez em direções múltiplas ou mesmo cruzamentos múltiplos. Os enigmas que podem ser resolvidos apenas fazendo-se a varredura sem necessidade de detectar as contingências são classificados como enigmas "fáceis"; enigmas mais difíceis, por definição, não podem ser resolvidos pela varredura básica somente.

## Marcações

Fazer a varredura e determinar quando mais nenhum número adicional pode ser descoberto. Deste ponto em diante, é necessário fazer algumas análise lógicas. Muitos acham útil guiar esta análise através da marcação dos números possíveis (candidatos) nas células em branco. Há duas formas populares: notação subscrita e pontos.

Na notação subscrita, os números possíveis são escritos subscritos (tamanho pequeno). O inconveniente a este é que os desafios originais impressos em um jornal são geralmente demasiado pequenos para acomodar mais do que alguns dígitos da escrita normal. Quando se utiliza da notação subscrita, o solucionador geralmente cria uma cópia maior do desafio e utiliza um lápis bem apontado ou lapiseira.

A segunda notação usa um padrão de pontos dentro de cada quadrado, onde a posição do ponto representa um número de 1 a 9. Os esquemas do ponto diferem e um método é ilustrado aqui. A notação do ponto tem a vantagem que pode ser usada no enigma original. A destreza é necessária para colocar os pontos, já que os pontos posicionados em lugares errados ou inadvertidos conduzem inevitavelmente à confusão e podem não ser fáceis de apagar sem gerar mais confusão. É recomendado utilizar um lápis bem apontado com uma borracha na extremidade.




Um método para marcar números prováveis em uma única célula colocando pontos com lápis. Para reduzir o número dos pontos usados em cada célula, o marcação deveria ser feita somente depois que o número máximo possível tiver sido adicionado ao desafio através da varredura. Os pontos são apagados a medida que os números correspondentes são eliminados como candidatos.

Uma técnica alternativa, que alguns acham mais fácil, é "marcar" os números de uma célula que "não podem" ser. Assim uma célula começará vazia e quanto mais restrições se tornam conhecidas, vai-se lentamente preenchendo. Quando somente uma marca ou número faltar, aquele deverá ser o valor da célula.

Uma vantagem deste método de marcação é que, pressupondo que nenhum erro seja feito e as marcas podem sobrescritas com o valor da célula, não há mais necessidade de borracha para apagar.

Ao usar a marcação, uma análise adicional pode ser executada. Por exemplo, se um dígito aparecer somente uma vez nas marcações escritas dentro de uma célula, então está claro qual o dígito que deve estar lá, mesmo se a célula tiver outros dígitos marcados.

Ao usar a marcação, algumas regras similares aplicadas em uma ordem especifica podem resolver todo o sudoku sem necessidade de retornar os passos anteriormente feitos.

## Metodologias

As duas principais metodologias para a análise são a "eliminação do candidato" e "tentativa-erro".

Na "eliminação do candidato", o progresso é feito através de sucessivas eliminações de números candidato de uma ou mais células para deixar apenas uma opção. Depois que cada resposta foi conseguida, uma outra varredura pode ser executada, geralmente verificando os efeitos das contingências (incertezas).

A metodologia da eliminação do candidato trabalha-se identificando "células combinadas". As pilhas seriam combinadas dentro de uma linha particular, coluna, ou região (bloco) se duas células contiverem o mesmo par de números candidatos ("p", "q") e mais nenhum outro, ou se três células contiverem o mesmo trio de números candidatos ("p", "q", "r") e mais nenhum outro. A colocação destes números seja lá onde mais for dentro desse mesmo bloco, faria com que a solução das células combinadas impossível; assim, os números candidatos ("p", "q", "r") que aparecerem em outras células da mesma linha, coluna ou região (bloco) podem ser eliminadas.

Este princípio funciona também com subconjuntos dos números candidatos, isto é, se três células tiverem candidatos ("p", "q", "r"), ("p", "q") e ("q", "r") ou apenas ("p", "r"), ("p", "q"), e ("q", "r"), todos os valores de ("p", "q", "r") em qualquer outra parte dentro desse mesmo conjunto podem ser eliminados. O princípio é verdadeiro para todas as quantidades de números candidatos.

Um segundo princípio relacionado é também verdadeiro. Se, dentro de qualquer conjunto de células (linha, coluna ou região), um conjunto de números candidatos pode somente aparecer dentro de um número de células iguais à quantidade de números candidatos, as células e os números são combinados e somente aqueles números podem aparecer nas células combinadas. Outros candidatos nas células combinadas podem ser eliminados. Por exemplo, se os dois números ("p", "q") podem somente aparecer em duas células dentro de uma combinação específica de células (linha, coluna ou região), todos os candidatos restantes naquelas duas células podem ser eliminados.

O primeiro princípio é baseado nas células onde somente os números combinados aparecem. O segundo é baseado nos números que aparecem somente em células combinadas. A validade de um ou outro princípio é demonstrada fazendo-se a pergunta: "Colocar o número eliminado impediria a conclusão das outras colocações necessárias?" Se a resposta à pergunta é "sim", então o número candidato na pergunta pode ser eliminado. As técnicas avançadas contêm estes mesmos conceitos, além de incluir múltiplas linhas, colunas e regiões nas análises.

Na maneira "tentativa-erro", uma célula com somente dois números candidatos é selecionada, e uma suposição é feita. As etapas acima são repetidas a menos que uma duplicação for encontrada ou uma célula ficar com nenhum candidato possível, em que caso o candidato alternativo é a solução. Em termos lógicos, isto é conhecido como reductio ad absurdum. Nishio é um forma limitada desta para esta maneira: para cada candidato para uma célula, a pergunta a ser feita será: "Colocar um número em particular impedirá a conclusão das outras colocações desse número?" Se a resposta for "sim", então esse candidato pode ser eliminado. A metodologia "e se" requer lápis e borracha. Esta metodologia pode ser desdenhada pelos puristas da lógica como tentativa e erro (e a maioria dos desafios publicados são construídos para se assegurar de que nunca seja necessário recorrer a esta tática), mas podem encontrar-se as soluções razoavelmente rápido.

Idealmente, é necessário que se descubra uma combinação de técnicas que evite alguns inconvenientes dos elementos acima. A contagem de regiões, linhas e colunas pode parecer tediosa. Escrever números candidatos nas células em branco pode consumir tempo. A técnica da "tentativa-erro" pode ser confusa, a menos que você seja muito organizado. O objectivo é encontrar uma técnica que minimize a contagem, a marcação de números candidatos, e necessidade de apagá-los.

## Níveis de dificuldade

Publicadores de passatempos geralmente classificam-nos por nível de dificuldade. Surpreendentemente o número de pistas dadas tem pouca ou nenhuma relação com o nível de dificuldade do jogo. Um jogo com um número pequeno de pistas dadas pode ser muito fácil de resolver, e um jogo com um número maior do que a média de pistas dadas pode ser extremamente difícil de resolver. A dificuldade de um jogo está mais baseada na relevância e no posicionamento das dicas dadas do que a quantidade de números.

Solucionadores por computador podem estimar a dificuldade que terá um ser humano para encontrar a solução, baseado na complexidade técnica de solução necessária. Esta estimativa permite que os publicadores personalizem seus enigmas de sudoku às audiências com diversos níveis de experiência. Algumas versões digitais oferecem diversos níveis da dificuldade.

A maioria das publicações classifica seus enigmas do sudoku em quatro níveis de dificuldade, embora, devido a sua subjetividade, os pontos reais de corte dos níveis e inclusive os nomes dos níveis possam variar amplamente. Tipicamente, entretanto, os títulos de alguns jogos são classificados de "fácil", "intermediário", "difícil", e "desafiador".

## Construção

É possível estabelecer grades iniciais com mais de uma solução possível e estabelecer grades com nenhuma solução, mas tais não são considerados enigmas apropriados para o sudoku; assim como na maioria dos outros enigmas de lógica pura, uma única solução possível é esperada.

Construir um enigma manualmente pode ser executado eficientemente através da pré-determinação das dicas e designando a elas somente os valores necessários para que se consiga fazer um progresso dedutivo. Também uma dica indefinida pode ser adicionada para que não se impeça a solução de nenhum valor em particular ou que de tal maneira seja colocado um valor diferente na grade antes que a construção esteja terminada; o solucionador deve ser capaz de fazer as mesmas deduções detendo-se nestas suposições, já que nesse ponto a dica é muito mais definitiva que qualquer outra coisa. Esta técnica dá ao construtor um maior controle sobre o fluxo do enigma a ser resolvido, conduzindo ao solucionador ao longo do mesmo trajeto que o compilador utilizou para construir o enigma (esta técnica também é adaptável para se compor outros enigmas além do sudoku).

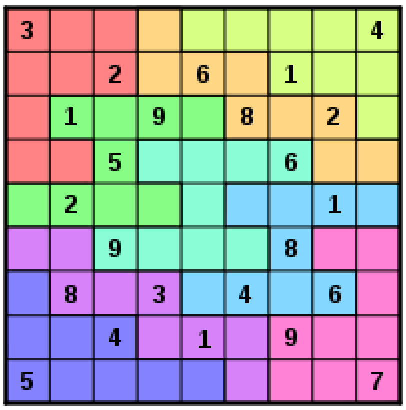
Um grande cuidado é necessário, entretanto, em não conseguir reconhecer onde um número pode ser logicamente deduzido em qualquer ponto da construção — sem considerar de quão tortuosa a lógica pode ser — pode resultar em um enigma insolucionável ao definir futuras dicas contraditórias com os números que já foram construídos. Construir um Sudoku com dicas simétricas é uma simples questão de colocar as dicas indefinidas em um padrão simétrico para se iniciar a solução.

A crença geral é de que os jogos Sudoku (Number Place) da Dell Magazines são gerados por computador; eles normalmente possuem mais de trinta dicas espalhadas aparentemente de maneira aleatória, muitas das quais podem possivelmente serem deduzidas a partir de outras dicas. Eles também não têm os créditos do autor – que é, o nome do construtor não está impresso em nenhum enigma. Wei-Hwa Huang reivindica que ele foi comissionado pela Dell para escrever um gerador de sudoku no inverno de 2000; antes disto, ele disse, os puzzles eram gerados manualmente. O gerador de enigmas foi escrito através do Visual C++, e embora tivesse opções de gerar mais enigmas no estilo japonês, com simetria e menos números, a Dell optou em não adotar estas características, ao menos não até sua recente publicação de revistas apenas de Sudoku.

Os sudokus da Nikoli são construídos manualmente, com o crédito para o autor; as dicas são geralmente encontradas em um padrão simétrico. Os jogos Number Place Challenger(veja a seção Variantes abaixo) da Dell também listam seus autores. Os jogos sudoku impressos na maioria dos jornais da Grã-Bretanha são aparentemente gerados por computador, mas empregam dicas simétricas; The Guardian é licenciado e publica os enigmas Sudoku construídos pela Nikoli, apesar disso ele não inclui os créditos autorais.

The Guardian conhecidamente os solicitou porque estes eram manualmente construídos, seus enigmas conteriam "detalhes imperceptíveis" que seriam muito improváveis em Sudokusgerados por computador. O desafio para os programadores de Sudoku é ensinar um programa como construir jogos "inteligentes", de tal maneira que eles se tornem indistinguíveis dos construídos por humanos; Wayne Gould passou seis anos ajustando o seu popular programa até que acreditou que tinha conseguido atingir este nível.

## Variantes




Um enigma sudoku nonominó

Apesar de a grade 9x9 com regiões 3x3 ser de longe a mais conhecida, diversas variações abundam: amostras do enigma podem ser grades de 4x4 com regiões 2x2; grades 5x5 regiões pentaminó têm sido publicadas sob o nome Logi-5; o World Puzzle Championship apresentou anteriormente grades 6x6 com regiões 2x3 e grades 7x7 com 6 regiões heptominó e com regiões desconexas. Daily SuDoku apresenta novas grades 4x4, 6x6 e mais simples 9x9 todos os dias com Daily SuDoku for Kids (Sudoku diário para crianças). Mesmo as grades 9x9 não são sempre padrões, com a Ebb publicando regularmente alguns com regiões nonominó (também conhecido como variação quebra-cabeça); o Campeonato Estadunidense de Enigmas de 2005 tinha um sudoku com regiões em paralelogramo que circundavam a parte exterior do enigma, como se a grade fosse uma arruela quadrada. Grades maiores também são possíveis, como o Daily SuDoku's 12x12 Monster SuDoku. O Times igualmente oferece um com grade 12x12: o Dodeka sudoku, com 12 regiões, cada uma sendo 4x3.

O sítio Conceptis Puzzles oferece, gratuitamente, um puzzle 12x12 (Mega Sudoku) por semana. A Dell regularmente publica o 16x16 Number Place Challenger (a variação 16x16 geralmente utiliza 1 até G ao invés do 0 até o F utilizado em notações hexadecimais), e a Nikoli oferece o enorme 25x25 Sudoku the Giant.

Outra variação comum é ter restrições adicionais, forçando a colocação de números além dos requisitos normais para as linhas, colunas e regiões. Geralmente, a restrição toma forma de uma "dimensão" extra; o mais comum é que os números nas diagonais principais da grade também devam ser únicos (não podendo ser repetidos). O supracitado Number Place Challenger faz parte desta variante, assim como o Sudoku X no Daily Mail, o qual utiliza grades 6x6. O Daily Mail também apresenta o Super Sudoku X em sua edição de final de semana: uma grade 8x8 na qual as linhas, colunas e diagonais principais, blocos 2x4 e blocos 4x2 contêm cada número apenas uma vez, bem como as suas diagonais principais; Conceptis Puzzles apresenta o Diagonal Sudoku em uma grade 9x9 e blocos 3x3 com as mesmas regras supracitadas.

Uma dimensão também utilizada é com os dígitos com as mesmas posições relativas em suas respectivas regiões; porém as regiões não formam um paralelogramo e possuem formatos variados e desconexos, neste formato Conceptis Puzzles apresenta o Irregular Sudoku, enquanto que algumas editoras também se utilizam de cores diferentes em cada grupo desconexo para uma melhor identificação de cada grupo de números.

Também pode ser encontrado o Circular Sudoku, também conhecido como Target Sudoku, inventado pelo matemático Peter Higgins. Nessa variante, todos os números devem aparecer em círculos concêntricos bem como em todos os pares de fatias adjacentes.

Outros tipos de restrições extras podem ser de natureza aritmética, tais como, exigindo que os números em um delineado segmento da grade tenham uma soma ou um produto específico (um exemplo pode ser o Killer Su Doku do The Times). Outros como o Magic Sudoku adicionam algumas restrições (diagonais de 1 a 9, e cores) ao sudoku-padrão para resolvê-lo com menos números.

Passatempos construídos a partir de múltiplas grades sudoku são comuns: cinco grades 9x9 sobrepostas umas às outras nas regiões dos cantos são conhecidas no Japão como Gattai 5 (cinco unidos) Sudoku. No The Times e no The Sydney Morning Herald, esta forma de passatempo é conhecida como Samurai SuDoku. No Conceptis Puzzles, são publicados semanalmente os Multi Sudoku, que são compostos de duas a cinco grades sobrepostas. Passatempos com vinte ou mais grades sobrepostas não são incomuns em algumas publicações japonesas. Geralmente, nenhuma dica é encontrada nas regiões sobrepostas.

Variações alfabéticas também surgiram; não há nenhuma diferença funcional no passatempo, a não ser se as letras significam alguma algo. Recentes variantes têm esta característica, geralmente em forma de palavra lida ao longo da diagonal principal depois de encontrada a solução; determinar a palavra antecipadamente pode ser visto como um auxílio para a solução. O Code Doku inventado por Steve Schaefer tem uma sentença completa embutida no passatempo; o Super Wordoku da Top Notch contém duas palavras de nove letras, uma em cada diagonal.

É discutível se estas formas são verdadeiros sudokus, contudo elas contêm uma solução "linguisticamente" válida e não podem necessariamente serem resolvidas inteiramente através da lógica, fazendo-se necessário que o solucionador determine a palavra embutida. Top Notch diz que esta característica foi projetada para derrotar os programas de computadores de solução.

Outros exemplos únicos de variação incluem um passatempo sudoku tridimensional inventado por Dion Church e publicado no Daily Telegraph em maio de 2005, e um sudoku de 100x100 criado por Michael Metcaff e publicado para o grupo do Yahoo! Sudokuworld.

## Matemática

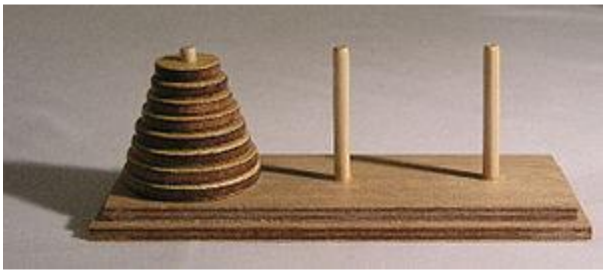
O problema geral de solucionar enigmas sudoku em tabuleiros $n^2 \times n^2$ de blocos $n \times n$ é conhecido como NP-completo. Isto dá algumas indicações de porque o sudoku é difícil de resolver. Contudo, em tabuleiros de tamanhos finitos, o problema é finito e pode ser solucionado através de um autômato finito probabilístico que conheça toda a árvore do jogo. Solucionar enigmas sudoku (assim como qualquer outro problema NP-difícil) pode ser expresso como sendo um problema de coloração de grafos. O objetivo do enigma em sua forma-padrão é se construir um grafo apropriado de nove colorações, informando, parcialmente, as nove colorações.

O grafo em questão tem 81 vértices, uma interpolação em cada célula da grade. Os vértices podem ser rotulados com os pares ordenados $(x, y)$, onde x e y são números inteiros entre 1 e 9. Neste caso, dois vértices distintos rotulados por $(x, y)$ e $(x', y')$ são conectados por uma borda se e apenas se $x = x' \vee y = y' \vee (\lceil x/3 \rceil = \lceil x'/3 \rceil \wedge \lceil y/3 \rceil = \lceil y'/3 \rceil)$.

O enigma é então completado designando-se um número inteiro entre 1 e 9 para cada interpolação, de tal maneira que os vértices que são unidos através de uma borda não tenham nenhum número inteiro igual designado neles. Uma grade de solução válida para o sudoku é também um quadrado latino. Há significativamente menos soluções de grades de sudoku válidas do que os quadrados latinos, porque o sudoku impõe restrições de região adicionais. Apesar disso, o número de soluções de sudoku para uma grade-padrão de 9x9 foi calculado em 2005 por Bertram Felgenhauer como sendo 6 670 903 752 021 072 936 960. Este número é igual a $9! \times 72^2 \times 2^7 \times 27.704.267.971$, o último fator o qual é um número primo. O resultado é derivado através da lógica e computação força bruta.

A derivação deste resultado foi simplificada consideravelmente por análises fornecidas por Frazer Jarvis e o número foi confirmado independentemente por Ed Russell. Russel e Jarvis também demonstraram de que quando as simetrias são levadas em conta, havia 5 472 730 538 soluções. O número de soluções válidas para a variação do sudoku de uma grade 16x16 é desconhecido.

## Torre de Hanói



Torre de Hanói é um "quebra-cabeça" que consiste em uma base contendo três pinos, em um dos quais são dispostos alguns discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O problema consiste em passar todos os discos de um pino para outro qualquer, usando um dos pinos como auxiliar, de maneira que um disco maior nunca fique em cima de outro menor em nenhuma situação. O número de discos pode variar sendo que o mais simples contém apenas três.

Atualmente, a Torre de Hanói tem sido tradicionalmente considerada como um procedimento para avaliação da capacidade de memória de trabalho, e principalmente de planejamento e solução de problemas.

O quebra-cabeça foi inventado pelo matemático francês Édouard Lucas. Ele teve inspiração de uma lenda para construir o jogo das Torres de Hanói em 1883. Já seu nome foi inspirado na torre símbolo da cidade de Hanói, no Vietnã.

Existem várias lendas a respeito da origem do jogo, a mais conhecida diz respeito a um templo Hindu, situado no centro do universo. Diz-se que Brama supostamente havia criado uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. Brama ordenara-lhes que movessem todos os discos de uma estaca para outra segundo as suas instruções.

As regras eram simples: apenas um disco poderia ser movido por vez e nunca um disco maior deveria ficar por cima de um disco menor. Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de uma estaca para a outra, o templo iria desmoronar e o mundo desapareceria. Não é claro se Lucas inventou essa lenda ou foi inspirado por ele.

Existem muitas variações sobre esta lenda. Por exemplo, em algumas narrativas, o templo é um mosteiro e os sacerdotes são monges. O templo ou mosteiro pode estar em diferentes partes do mundo - incluindo Hanói, Vietnã, e pode ser associado a qualquer religião. Em algumas versões, são introduzidos outros elementos, tais como o fato de a torre foi criado no início do mundo, ou que os padres ou monges podem fazer apenas uma mudança por dia.

## Soluções

Solução do problema com uma torre de quatro discos.

É interessante observar que o número mínimo de "movimentos" para conseguir transferir todos os discos da primeira estaca à terceira é 2n-1, sendo n o número de discos. Logo:

Para solucionar um Hanói de 4 discos, são necessários 15 movimentos

Para solucionar um Hanói de 7 discos, são necessários 127 movimentos

Para solucionar um Hanói de 15 discos, são necessários 32.767 movimentos

Para solucionar um Hanói de 64 discos, como diz a lenda, são necessários 18.446.744.073.709.551.615 movimentos.

Para mover o primeiro disco da torre original, 1 movimento é gasto. Para mover o segundo da torre original, sendo que o primeiro já foi movido e será construída uma torre com os 2 menores discos, são gastos 2 movimentos. Para deslocar o terceiro disco formando nova torre com os três menores discos, tendo a torre com os dois menores já formada, são gastos 4 movimentos.

Assim se sucede com os próximos discos até que o enésimo disco (o último) seja deslocado compondo uma torre com os outros discos tendo uma torre com o penúltimo disco e os demais juntos já formada. A sucessão formada pela soma dos movimentos é uma sucessão $(1, 2, 4, 8 ... 2^n)$.

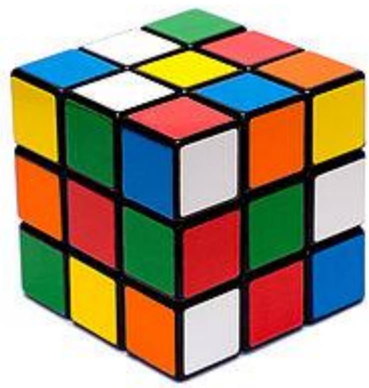
A fórmula $2^n - 1$ é provinda da soma de uma progressão geométrica.

Sabe-se que em uma progressão geométrica a soma de seus termos equivale a $[a * (q^n - 1)]/(q - 1)$ onde "a" é o primeiro termo e "q" é a razão.

Já que a razão é 2 e o primeiro termo é 1 temos que $[a * (q^n - 1)]/(q - 1) = [1 * (2^n - 1)]/(2 - 1) = 2^n - 1$

Uma solução iterativa em Java para as Torres de Hanoi. A letra A representa o primeiro pino mais à esquerda, a letra C o pino central e a letra B representa o último pino para o qual todos os Disco devem estar no final do algoritmo.

## Cubo de Rubik



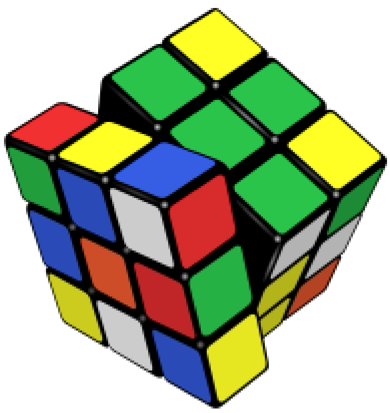
Cubo de Rubik, também conhecido como cubo mágico, é um quebra-cabeça tridimensional, inventado pelo húngaro Ernő Rubik em 1974. Originalmente foi chamado o "cubo Mágico" pelo seu inventor, mas o nome foi alterado pela Ideal Toys para "cubo de Rubik".[1] Nesse mesmo ano, ganhou o prémio alemão do "Jogo do Ano" (Spiel des Jahres). Ernő Rubik demorou um mês para resolver o cubo pela primeira vez. O cubo de Rubik tornou-se um ícone da década de 1980,[2] década em que foi mais difundido.

O cubo de Rubik é um cubo geralmente confecionado em plástico e possui várias versões, sendo a versão 3x3x3 a mais comum, composta por 6 faces de 6 cores diferentes, geralmente com arestas de 5,7 cm cada. Outras versões menos conhecidas são a 2x2x2, 4x4x4 e a 5x5x5.

É considerado um dos brinquedos mais populares do mundo, atingindo um total de 900 milhões de unidades vendidas, bem como suas diferentes imitações.

O invento, descendente de um protótipo 2x2x2, criado por Larry Nichols (Lavourensis Plenus) em março de 1970, é um quebra-cabeça que consiste em um cubo. Cada uma das suas seis faces está dividida em nove partes, 3x3, num total de 26 peças que se articulam entre si devido ao mecanismo da peça interior central fixa, oculta dentro do cubo.

Número de combinações possíveis no cubo de Rubik



Rotação de uma das partes do cubo.

Podemos permutar os oito vértices do cubo, logo podemos arranjá-los de $8!$ formas diferentes.

Também podemos permutar suas doze arestas, existindo assim $12!$ combinações para as mesmas.

Entretanto, apenas metade das possibilidades acima são verdadeiras, uma vez que não é possível permutar duas arestas sem trocar também a posição de dois vértices, e vice-versa.

Também é possível girar todos os vértices do cubo, salvo um, sem que nada mais mude no cubo. Uma vez que a orientação do último vértice será determinada pela orientação dos demais, nós temos $3^7$ orientações distintas para os vértices.

O mesmo vale para a orientação das arestas. Sendo assim, temos $2^{11}$ possibilidades para elas.

No total, o número de combinações possíveis no cubo de Rubik é:

$$\frac{8! \cdot 12! \cdot 3^7 \cdot 2^{11}}{2} = 43\ 252\ 003\ 274\ 489\ 856\ 000$$

Se alguém pudesse realizar todas as combinações possíveis a uma velocidade de um movimento por segundo, demoraria 1400 trilhões de anos, supondo que nunca repetisse a mesma combinação.

## Tangram

Como na maioria dos exemplares modernos, este tangram de madeira é guardado na forma de um quadrado.

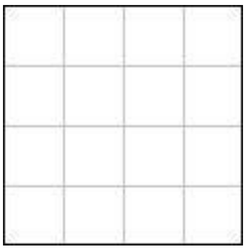
O Tangram (chinês: 七巧板, pinyin: qīqiǎobǎn, literalmente 'sete peças de habilidade') é um quebra-cabeças geométrico chinês formado por 7 peças, chamadas tans: são 2 triângulos grandes, 2 pequenos, 1 médio, 1 quadrado e 1 paralelogramo. Utilizando todas essas peças sem sobrepô-las, podemos formar várias figuras. Segundo a Enciclopédia do Tangram é possível montar mais de 5000 figuras.

Não se sabe ao certo como surgiu o Tangram, mas acredita-se ter sido inventado na China durante a Dinastia Song[1] e levado para Europa por navios mercantes no início do século XIX, onde se tornou muito popular. Há várias lendas sobre a sua origem e o seu renascimento no mundo dos mortos. Uma diz que uma pedra preciosa se desfez em sete pedaços, e com eles era possível formar várias formas. Outra diz que um imperador deixou um espelho quadrado cair, e este se desfez em 7 pedaços que poderiam ser usados para formar várias figuras,de diversas formas. Segundo algumas, o nome Tangram vem da palavra inglesa "tangam", de significado "misturas" ou "desconhecidos".

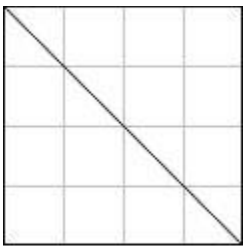
Outros dizem que a palavra vem da dinastia chinesa Tang, ou até do barco cantonês "bundumocu", onde mulheres entretinham os marinheiros americanos. Na Ásia o jogo é chamado de "300 placas".

Esse quebra-cabeças, também conhecido como jogo das 1000 peças, é utilizado pelos professores de geometria como instrumento facilitador da compreensão das formas geométricas. Além de facilitar o estudo da geometria, ele desenvolve a criatividade e o raciocínio lógico, que também são fundamentais para o estudo da matemática e da ciência.

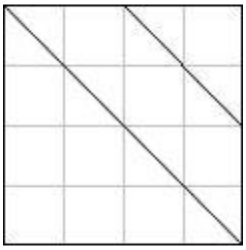
**Como construir um Tangram**



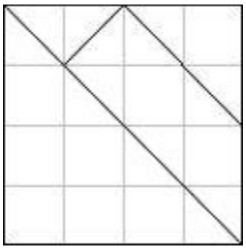
1. Trace um quadrado na proporção de 4 por 4 unidades de medida.



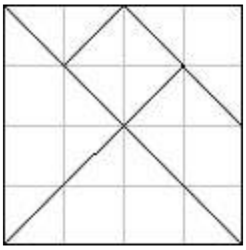
2. Trace uma diagonal, do canto superior esquerdo ao canto inferior direito.



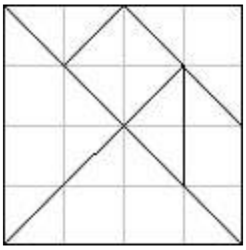
3. Trace outra diagonal menor paralela à anterior, da metade superior à metade direita do quadrado.



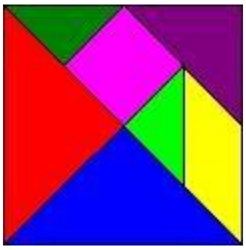
4. Da extremidade superior da diagonal menor, ligue à diagonal maior por um traço perpendicular à elas (corresponde a uma hipotenusa de catetos uma unidade cada).



5. Trace uma diagonal partindo da metade da diagonal do passo (3) até o canto inferior esquerdo do quadrado.



6. Partindo da mesma origem do passo anterior, trace uma vertical para baixo (de comprimento duas unidades) até a diagonal maior.



7. Colora cada um dos sete pedaços (tans), resultantes dos traçados que dividiram o quadrado, com uma cor distinta.

Trabalhar com jogos nas aulas de Matemática é uma das situações didáticas que contribuem para a criação de contextos significativos de aprendizagem para os alunos. Esta descoberta se deu no conjunto de uma série de transformações que o ensino experimentou nas últimas décadas, desde que professores e instituições passaram a pautar sua prática por uma concepção de aprendizagem segundo a qual aprender significa elaborar uma representação pessoal do conteúdo que é objeto de ensino - quando os alunos constroem conhecimentos em um processo ativo de estabelecimento de relações e atribuição de significados.

Ensinar passou a ser compreendido como criar condições adequadas a esse processo e à realização de intervenções com vistas a possibilitar avanços aos alunos. Com isso, novos critérios passaram a ser úteis para a tarefa do professor, como: organizar o ensino em torno de situações-problema que façam sentido para os estudantes e tornem necessária a construção ou reelaboração de conhecimentos para sua resolução; estabelecer relações com os fazeres que caracterizam o trabalho de uma determinada área de conhecimento; compreender as práticas culturais de uso de um determinado saber e as formas como os indivíduos, em geral, se relacionam com elas.

É nesse contexto que o jogo passa a ser uma presença mais constante nas aulas de Matemática. Mas a experiência tem indicado que a presença do jogo, por si só, não leva à aprendizagem dos alunos. Por isso, vamos discutir nos capítulos seguintes que condições podem fazer do jogo um aliado do professor na organização de boas situações de aprendizagem. O ponto de partida é compreender o jogo como uma prática humana e social de relação com o conhecimento.

A utilização de atividades lúdicas na Matemática e de materiais concretos é totalmente relacionada ao desenvolvimento cognitivo da criança. Há de se refletir que alguns conteúdos específicos da Matemática não possuem relação com a ideia de serem aplicados utilizando jogos, mas de certa forma promovem um senso crítico, investigador, que ajuda na compreensão e entendimento de determinados tópicos relacionados ao ensino da Matemática.

O nosso aprendiz não pode encarar o jogo como uma parte da aula em que não irá fazer uma atividade escrita ou não precisará prestar atenção no professor, promovendo assim uma conduta de indisciplina e desordem, mas precisa ser conscientizado de que aquele momento é importante para sua formação, pois ele usará de seus conhecimentos e suas experiências para participar, argumentar, propor soluções na busca de chegar aos resultados esperados pelo orientador, porque o jogo pode não ter uma resposta única, mas várias, devemos respeitar as inúmeras respostas, desde que não fujam do propósito.

## Jogo das fichas coloridas

Organização da classe:

- Formar grupos de 3 a 5 participantes;

Capacidades a serem trabalhadas:

- Perceber que o número é formado de algarismos ordenados;

- Relacionar as cores das fichas às ordens numéricas;

Material:

- 10 fichas coloridas (vermelhas, azuis, verdes e brancas) numeradas de 0 a 9;

- Cartaz básico (tamanho A4) com cores variadas

Desenvolvimento:

Cada jogador pega uma ficha de cada cor e registra o número formado no quadro somando os valores.

Em seguida passa a vez ao colega. Depois da última jogada ganha aquele que conseguir formar o maior numeral.Este jogo é utilizado para trabalhar o conceito de ordens e classes, podendo ser adaptado para o primeiro e segundo ciclo. O mais importante é a interação.

Os participantes podem ajudar um ao outro, mutuamente, sem interferir no desempenho do vencedor.

O professor deve acompanhar o registro do jogo e fazer as explorações possíveis, graduando as intervenções a cada dia do jogo.

Organização da classe:

- Poderá ser realizado com toda a turma, duas equipes ou duplas;

Capacidades a serem trabalhadas:

- Compreender o processo da multiplicação, da divisão e construir fatos básicos;

Material:

- 2 dados;

- Folhas com várias retas numéricas;

Desenvolvimento:

Primeira proposta: Desenhar uma reta numérica no chão.

Um aluno inicia, jogando dois dados diferentes, para representar na reta com passos.

O lado do dado maior indicará a quantidade de passos e o lado menor, indicará o tamanho de cada passo.

Outro aluno verifica onde o colega parou para marcar os pontos daquela equipe.

E assim todos farão o mesmo procedimento, disputando quem chegou mais longe.

Segunda proposta: O professor entrega a folha das retas numéricas para as duplas, que jogarão os dados para efetuar as jogadas traçando com o lápis, os passos, seguindo as mesmas regras da

primeira
proposta.

Ganhará o jogo quem conseguir avançar mais longe na reta numérica.

O professor deverá fazer intervenções para levar o aluno a relacionar as jogadas com a multiplicação e a divisão.

Ex.: 4 passos de 3 distâncias chegará no número 12.

**Diagrama dos hexágonos**

Organização da classe:

- Formar duplas, trio ou individual;

Capacidades a serem trabalhadas:

-Desenvolver coordenação motora fina;

- Construir conceitos de fração, área e perímetro;

- Identificar figuras geométricas;

Material:

- Folha chamex com 4 hexágonos divididos de forma diferente;

- Lápis de cor, tesoura;

Desenvolvimento:

Colorir os hexágonos nas respectivas cores: amarelo, azul, vermelho e verde.

Recortar todas as linhas internas e externas dos mesmos.

A seguir montar um hexágono maior com todas as peças, a partir do amarelo que fica no centro da nova montagem.

É importante que durante a atividade o professor faça as intervenções, levando o aluno a compreender novos conceitos: área, perímetro e fração equivalente.

Exemplos:

1- Quantos triângulos pequenos cabem dentro do novo hexágono?

2- Que fração do novo hexágono, são as peças de cores:

amarela____

azul ___

verde____

vermelho____

3- Quais polígonos você formou quando recortou os hexágonos pequenos?

4- O que você observou no hexágono maior em relação à área de cada cor?
5- o que aconteceu com o perímetro do novo hexágono?

Fonte: Atividades e jogos com números

## Jogo das possibilidades

Organização da classe:

- Formar grupos com 4 a 5 participantes;

Capacidades a serem trabalhadas:

- Trabalhar fatos simples;

- Desenvolver atenção, concentração e raciocínio lógico;

- Explorar conceito intuitivo de probabilidade;

Material:

- 2 dados coloridos;

- Tabuleiro com escudos dos times;

- Quadro de registro das jogadas;

Desenvolvimento:

Cada participante escolhe ou sorteia o time para apostar.

O primeiro jogador lança os dois dados de cores diferentes e observa se a coluna horizontal e vertical contém o escudo do time que ele escolheu.

Se tiver nas duas colunas soma os pontos dos dois dados, se tiver apenas em uma das colunas, subtrai os números dos dados.

Caso não tenha em nenhuma das duas colunas passa a vez para o colega.

Cada jogador registra no quadro as jogadas.

Ganha o jogo o participante que obtiver o maior número no total.

Intervenções possíveis:

- Quais os times mais difíceis de sair?

- Como posso obter a pontuação 12?

- Qual o time que tem as mesmas chances de sair?

- Pode-se também substituir os fatos da adição pela multiplicação e da subtração pela adição.