HITÓRIA DA MATEMÁTICA MODERNA

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O **Movimento da Matemática Moderna** foi um movimento internacional do ensino de matemática que surgiu na década de 1960 e se baseava na formalidade e no rigor dos fundamentos da teoria dos conjuntos e da álgebra para o ensino e a aprendizagem de Matemática .[1] A introdução da matemática moderna é objeto de críticas e controvérsias. Morris Kline foi um dos críticos que ajudou a cunhar o termo "Matemática Moderna" ao publicar em 1973, o livro *Why Johnny can't add: The failure of the new math*[1], no qual apresenta a origem, o porquê e as deformações do movimento de reforma do currículo tradicional no ensino de matemática nos Estados Unidos, que depois teve repercussão em todo o mundo.

[1] Este livro foi traduzido em 1976 para o português com o nome *O fracasso da matemática moderna* e teve grande repercussão no meio acadêmico brasileiro.

O Movimento da Matemática Moderna, foi um movimento que teve grande força após a Segunda Guerra Mundial. A partir da década de 60 houve maior preocupação nas áreas relacionadas com a educação, a Matemática foi uma delas e pode tratar de temas que moldam área atual, realizou-se unificações de disciplinas e foi elencado temas pelos quais seriam debatidos e a partir de então ocorrem reuniões frequentes para que o tema seja debatido e postos a análise.

Segundo Lima (2011) , o ensino da matemática é embasado em três pilares: conceituação, manipulação e aplicações. A conceituação é constituída por definições, demonstrações e correlações (conexões). A manipulação compreende o manuseio de fórmulas algébricas, de operações aritméticas, de soluções de equações por meio de algoritmos. A manipulação tem um papel preponderante no ensino da matemática. Na década de 60, surgiu o movimento denominado Matemática Moderna que enfatizava a conceituação, em detrimento da manipulação. O aluno aprendia que $3 + 5 = 5 + 3$, pela propriedade comutativa da adição, mas não sabia que é 8. O movimento acabou caindo no descrédito, porque $3 + 5 = 5 + 3$, não resolve o problema. As aplicações consistem na utilização de noções e teorias da matemática na resolução de problemas para obter resultados, tirar conclusões e fazer previsões.

Para ÁVILA (1993), a Matemática Moderna foi uma reforma profunda no ensino da matemática. Enfatizava acentuadamente a linguagem de conjuntos e abordava as diferentes partes da matemática de modo excessivamente formal. Inicialmente, contou com muitos adeptos, mas com a constatação de sua ineficiência, foi aumentando o número de opositores. Em muitos países, a Matemática Moderna foi sendo deixada de lado, com o aparecimento de novas mudanças. No Brasil, esse processo foi mais demorado, deixando resquícios que se perpetuam. O conteúdo era carregado de simbolismo e linguagem de conjunto, o que dificulta a aprendizagem. Em vez de dizer que as raízes da equação $x^2 + 2x - 3 = 0$ são 1 e -3, se dizia que o conjunto verdade da sentença $x^2 + 2x - 3 = 0$ é $V = \{-3,1\}$. A matemática depende de linguagem e simbolismo próprios. Como essas ferramentas são o que torna a matemática tão difícil, mas são inevitáveis, devem ser utilizadas com o necessário cuidado.

1- SURGIMENTO DA MATEMÁTICA

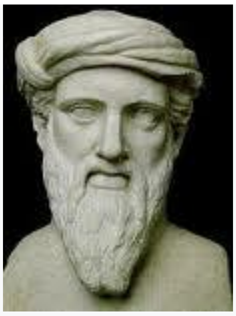
A **matemática** (dos termos gregos *μάθημα*, transliterado *máthēma*, 'ciência', conhecimento' ou 'aprendizagem';[1] e *μαθηματικός*, transliterado *mathēmatikós*, 'inclinado a aprender') é a ciência do raciocínio lógico e abstrato, que estuda quantidades, medidas, espaços, estruturas, variações e estatísticas. Um trabalho matemático consiste em procurar por padrões, formular conjecturas e, por meio de deduções rigorosas a partir de axiomas e definições, estabelecer novos resultados. A matemática desenvolveu-se principalmente na Mesopotâmia, no Egito, na Grécia, na Índia e no Oriente Médio. A partir da Renascença, o desenvolvimento da matemática intensificou-se na Europa, quando novas descobertas científicas levaram a um crescimento acelerado que dura até os dias de hoje.[2]

Registros arqueológicos mostram que a matemática é tanto um fator cultural, quanto parte da história do desenvolvimento da nossa espécie. Ela evoluiu a partir de contagens, medições, cálculos e do estudo sistemático de formas geométricas e movimentos de objetos físicos. Raciocínios mais abstratos que envolvem argumentação lógica surgiram com os matemáticos gregos aproximadamente em 300 a.C., notadamente com a obra *Os Elementos*, de Euclides. A necessidade de maior rigor foi percebida e estabelecida por volta do início do século XVIII.[3]

Há muito tempo, busca-se um consenso quanto à definição do que é a matemática. No entanto, nas últimas décadas do século XX, tomou forma uma definição que tem ampla aceitação entre os matemáticos: *matemática é a ciência das regularidades* (padrões). Segundo esta definição, o trabalho do matemático consiste em examinar padrões abstratos, tanto reais como imaginários, visuais ou mentais. Ou seja, os matemáticos procuram regularidades nos números, no espaço, na ciência e na imaginação e formulam teorias com as quais tentam explicar as relações observadas. Uma outra *definição* seria que matemática é a investigação de estruturas abstratas definidas axiomaticamente, usando a lógica formal como estrutura comum. As estruturas específicas geralmente têm sua origem nas ciências naturais, mais comumente na física, mas os matemáticos também definem e investigam estruturas por razões puramente internas à matemática (matemática pura), por exemplo, ao perceberem que as estruturas fornecem uma generalização unificante de vários subcampos ou uma ferramenta útil em cálculos comuns.[3][4]

A matemática é usada como uma ferramenta essencial em muitas áreas do conhecimento, tais como engenharia, medicina, física, química, biologia, e ciências sociais. Matemática aplicada, ramo da matemática que se ocupa de aplicações do conhecimento matemático em outras áreas do conhecimento, às vezes leva ao desenvolvimento de um novo ramo, como aconteceu com estatística ou teoria dos jogos. O estudo de matemática pura, ou seja, quase sempre sem a preocupação imediata com sua aplicabilidade, muitas vezes mostrou-se útil anos ou séculos adiante, como aconteceu com os estudos das cônicas ou de teoria dos números feitos pelos gregos, úteis, respectivamente, em descobertas sobre astronomia feitas por Kepler no século XVII, ou para o desenvolvimento de segurança em computadores nos dias de hoje.[4]

História



Pitágoras de Samos

Além de reconhecer quantidades de objetos, o homem pré-histórico aprendeu a contar quantidades abstratas como o tempo: dias, estações, anos. A aritmética elementar (adição, subtração, multiplicação e divisão) também foi conquistada naturalmente. Acredita-se que esse conhecimento é anterior à escrita e, por isso, não há registros históricos.

O primeiro objeto conhecido que confirma a habilidade de cálculo é o osso de Ishango, uma fíbula de babuíno com riscos que indicam uma contagem, que data de 20 000 anos atrás[5].

Muitos sistemas de numeração existiram. O Papiro de Rhind é um documento que resistiu ao tempo e mostra os numerais *escritos* no Antigo Egito.

O desenvolvimento da matemática permeou as primeiras civilizações, e tornou possível o desenvolvimento de aplicações concretas: o comércio, o manejo de plantações, a medição de terra, a previsão de eventos astronômicos, e por vezes, a realização de rituais religiosos.

A matemática começou a ser desenvolvida motivada pelo comércio, medições de terras para a agricultura, registro do tempo, astronomia. A partir de 3000 a.C., quando Babilônios e Egípcios começaram a usar aritmética e geometria em construções, astronomia e alguns cálculos financeiros, a matemática começou a se tornar um pouco mais sofisticada.[6] O estudo de estruturas matemáticas começou com a aritmética dos números naturais, seguiu com a extração de raízes quadradas e cúbicas, resolução de algumas equações polinomiais de grau 2, trigonometria, frações, entre outros tópicos.

Euclides: painel em mármore no *Museo dell'Opera di Santa Maria del Fiore*.

Tais desenvolvimentos são creditados às civilizações acadiana, babilônica, egípcia, chinesa, ou ainda, àquelas do vale do Indo. Por volta de 600 a.C., na civilização grega, a matemática, influenciada por trabalhos anteriores e pela filosofia, tornou-se mais abstrata. Dois ramos se distinguiram: a aritmética e a geometria. Formalizaram-se as generalizações, por meio de definições axiomáticas dos objetos de estudo, e as demonstrações. A obra *Os Elementos de Euclides* é um registro importante do conhecimento matemático na Grécia do século III a.C.

A civilização muçulmana permitiu que a herança grega fosse conservada, e propiciou seu confronto com as descobertas chinesas e hindus, notadamente na questão da representação numérica.[*carece de fontes*] Os trabalhos matemáticos desenvolveram-se consideravelmente tanto na trigonometria, com a introdução das funções trigonométricas, quanto na aritmética. Desenvolveu-se ainda a análise combinatória, a análise numérica e a álgebra de polinômios.

Na época do Renascentismo, uma parte dos textos árabes foi estudada e traduzida para o latim. A pesquisa matemática se concentrou então na Europa. O cálculo algébrico desenvolveu-se rapidamente com os trabalhos dos franceses François Viète e René Descartes. Nessa época também foram criadas as tabelas de logaritmos, que foram extremamente importantes para o avanço científico dos séculos XVI a XX, sendo substituídas apenas após a criação de computadores. A percepção de que os números reais não são suficientes para resolução de certas equações também data do século XVI. Já nessa época começou o desenvolvimento dos chamados números complexos, apenas com uma definição e quatro operações. Uma compreensão mais profunda dos números complexos só foi conquistada no século XVIII com Euler.

No início do século XVII, Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz descobriram a noção de cálculo infinitesimal e introduziram a noção de *fluxor* (vocábulo abandonado posteriormente). Ao longo dos séculos XVIII e XIX, a matemática se desenvolveu fortemente com a introdução de novas estruturas abstratas, notadamente os grupos (graças aos trabalhos de Évariste Galois) sobre a resolubilidade de equações polinomiais, e os anéis definidos nos trabalhos de Richard Dedekind.

O rigor em matemática variou ao longo do tempo: os gregos antigos foram bastante rigorosos em suas argumentações; já no tempo da criação do Cálculo Diferencial e Integral, como as definições envolviam a noção de limite que, pelo conhecimento da época, só poderia ser tratada intuitivamente, o rigor foi menos intenso e muitos resultados eram estabelecidos com base na intuição. Isso levou a contradições e "falsos teoremas". Com isso, por volta do século XIX, alguns matemáticos, tais como Bolzano, Karl Weierstrass e Cauchy dedicaram-se a criar definições e demonstrações mais rigorosas.

A matemática ainda continua a se desenvolver intensamente por todo o mundo nos dias de hoje.

No Brasil

O ensino da matemática e, na verdade, de outras matérias, desde o descobrimento do Brasil, era ministrado pelos jesuítas até a expulsão deles em 1759. Desta data até 1808, os ex-alunos dos jesuítas ficaram encarregados pelo ensino. De 1808 a 1834, a matéria era ministrada nas escolas do Exército e da Marinha e a, partir de 1873, também nas escolas de engenharia. Em 1874, é criada a Escola Politécnica a partir da Escola Central, ex-Escola Militar. A Escola de Minas de Ouro Preto é criada em 1875 e a Escola Politécnica de São Paulo em 1893. Assim, o ensino de matemática passa também a ser oferecido em escolas não militares.[7]

Áreas e metodologia

As regras que governam as operações aritméticas são as da álgebra elementar, e as propriedades mais profundas dos números inteiros são estudadas na teoria dos números. A investigação de métodos para resolver equações algébricas leva ao campo da álgebra abstrata, que, entre outras coisas, estuda anéis e corpos — estruturas que generalizam as propriedades possuídas pelos números. O conceito de vetor, importante para a física, é generalizado no espaço vetorial e estudado na álgebra linear, pertencendo aos dois ramos da estrutura e do espaço.

O ensino da geometria.

O estudo do espaço se originou com a geometria, primeiro com a geometria euclidiana e a trigonometria; mais tarde foram generalizadas nas geometrias não-euclidianas, as quais cumprem um papel central na formulação da teoria da relatividade. A teoria de Galois permitiu resolverem-se várias questões sobre construções geométricas com régua e compasso. A geometria diferencial e a geometria algébrica generalizam a geometria em diferentes direções: a geometria diferencial enfatiza o conceito de sistemas de coordenadas, equilíbrio e direção, enquanto na geometria algébrica os objetos geométricos são descritos como conjuntos de solução de equações polinomiais. A teoria dos grupos investiga o conceito de simetria de forma abstrata e fornece uma ligação entre os estudos do espaço e da estrutura. A topologia conecta o estudo do espaço e o estudo das transformações, focando-se no conceito de continuidade.

Entender e descrever as alterações em quantidades mensuráveis é o tema comum das ciências naturais e o cálculo foi desenvolvido como a ferramenta mais útil para fazer isto. A descrição da variação de valor de uma grandeza é obtida por meio do conceito de função. O campo das equações diferenciais fornece métodos para resolver problemas que envolvem relações entre uma grandeza e suas variações. Os números reais são usados para representar as quantidades contínuas e o estudo detalhado das suas propriedades e das propriedades de suas funções consiste na análise real, a qual foi generalizada para análise complexa, abrangendo os números complexos. A análise funcional trata de funções definidas em espaços de dimensões tipicamente infinitas, constituindo a base para a formulação da mecânica quântica, entre muitas outras coisas.

Para esclarecer e investigar os fundamentos da matemática, foram desenvolvidos os campos da teoria dos conjuntos, lógica matemática e teoria dos modelos.

Quando os computadores foram concebidos, várias questões teóricas levaram à elaboração das teorias da computabilidade, complexidade computacional, informação e informação algorítmica, as quais são investigadas na ciência da computação

René Descartes

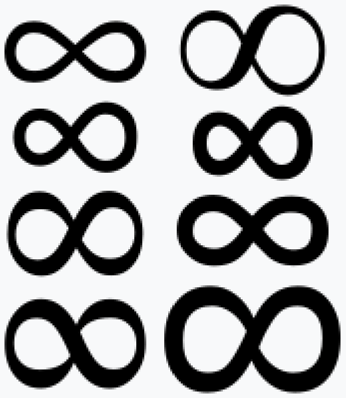
Os computadores também contribuíram para o desenvolvimento da teoria do caos, que trata do fato de que muitos sistemas dinâmicos não-lineares possuem um comportamento que, na prática, é imprevisível. A teoria do caos tem relações estreitas com a geometria dos fractais, como o conjunto de Mandelbrot e de Mary, descoberto por Lorenz, conhecido pelo atrator que leva seu nome.

Um importante campo na matemática aplicada é a estatística, que permite a descrição, análise e previsão de fenômenos aleatórios e é usada em todas as ciências. A análise numérica investiga os métodos para resolver numericamente e de forma eficiente vários problemas usando computadores e levando em conta os erros de arredondamento. A matemática discreta é o nome comum para estes campos da matemática úteis na ciência computacional.

Por fim, uma teoria importante desenvolvida pelo ganhador do Prémio Nobel, John Nash, é a teoria dos jogos, que possui atualmente aplicações nos mais diversos campos, como no estudo de disputas comerciais, pois uma de suas principais premissas é a de que todos os participantes querem obter o maior lucro possível.

Entretanto, premissas deste tipo levantam restrições para a aplicação desta teoria em outras áreas, como a biologia, por exemplo.

Notação, linguagem e rigor

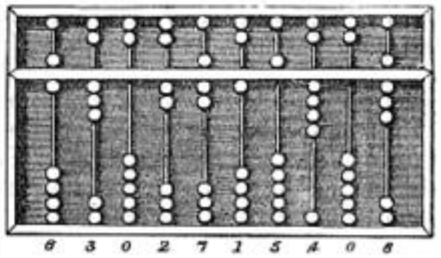


O símbolo do infinito ∞ em várias formas.

A maior parte da notação matemática em uso atualmente não havia sido inventada até o século XVI.[8] Antes disso, os matemáticos escreviam tudo em palavras, um processo trabalhoso que limitava as descobertas matemáticas. No século XVIII, Euler foi responsável por muitas das notações em uso atualmente. A notação moderna deixou a matemática muito mais fácil para os profissionais, mas os iniciantes normalmente acham isso desencorajador. Isso é extremamente compreensivo: alguns poucos símbolos contêm uma grande quantidade de informação. Assim como a notação musical, a notação matemática moderna tem uma sintaxe restrita e informações que seriam difíceis de escrever de outro modo.

A língua matemática pode também ser difícil para os iniciantes. Palavras como *"e"* e "*ou"* têm significados muito mais precisos do que a fala do dia-a-dia. Além disso, palavras como *aberto* e *campo* têm recebido um significado matemático específico. O jargão matemático inclui termos técnicos como *homeomorfismo* e *integral*. Mas há uma razão para a notação especial e o jargão técnico : matemática requer mais precisão do que a fala do dia-a-dia. Matemáticos se referem a essa precisão da linguagem e lógica como *"rigor"*.

Áreas da matemática



O ábaco é uma ferramenta de cálculo simples utilizada desde os tempos antigos.

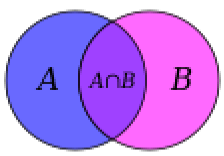
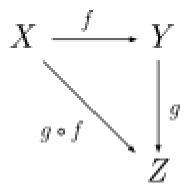
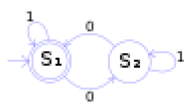
A matemática pode, em linhas gerais, ser subdivida nos estudos de quantidade, estrutura, espaço e mudança (i.e. aritmética, álgebra, geometria, e análise). Além desses principais assuntos, também há subdivisões dedicadas a explorar as ligações do cerne da matemática a outros campos: à lógica, à teoria de conjuntos (fundações), à matemática empírica das várias ciências (matemática aplicada), e, mais recentemente, ao estudo rigoroso da incerteza. Enquanto algumas áreas da matemática possam parecer disjuntas, o programa Langlands tem encontrado conexões entre áreas como grupos de Galois, superfície de Riemann e teoria dos números.

Fundações e filosofia

Para clarificar as fundações da matemática, desenvolveram-se os campos como a matemática lógica e a teoria dos conjuntos. A lógica matemática inclui o estudo matemático da lógica e as aplicações de lógica formal em outras áreas da matemática; a teoria de conjuntos é o ramo da matemática que estuda conjuntos ou coleções de objetos. A teoria das categorias, que lida de uma maneira abstrata com as estruturas matemáticas e as relações entre elas, ainda está em desenvolvimento. A expressão "crise nas fundações" descreve a busca por uma fundação rigorosa para a matemática ocorrida, aproximadamente, de 1900 a 1930.[9] Algumas discordâncias sobre as fundações da matemática persistem atualmente. A crise de fundações foi estimulada por várias controvérsias à época, incluindo a controvérsia sobre a teoria de conjuntos de Cantor e a controvérsia de Brouwer–Hilbert.

A lógica matemática está preocupada com um escopo axiomático rigoroso, e com o estudo das implicações de tal escopo. Tal qual seja, a existência dos teoremas da incompletude de Gödel (informalmente) implicam que qualquer sistema formal efetivo que contém aritmética básica, se todos os teoremas nele contido puderem ser provados são verdadeiros, é necessariamente *incompleto* (significando que há teoremas verdadeiros que não podem ser provados *nesse sistema formal*). Para qualquer coleção finita de axiomas da teoria dos números que seja tomada como fundação matemática, Gödel mostrou como construir um enunciado formal que é um fato verdadeiro na teoria dos números, mas que não decorrem dos axiomas. Logo, nenhum sistema formal é uma axiomatização completa da teoria dos números como um todo. A lógica moderna é dividida em teoria da computabilidade, em teoria dos modelos, e em teoria da prova, e está intrinsecamente relacionada com a ciência da computação teórica,[*carece de fontes*] bem como com a teoria das categorias. No contexto da teoria da computabilidade, a impossibilidade de uma axiomatização completa da teoria dos números pode também ser formalmente demonstrado como uma consequência do teorema MRDP.

A ciência da computação teórica inclui a teoria da computabilidade, a teoria da complexidade computacional, e a teoria da informação. A teoria da computabilidade examina as limitações de vários modelos teóricos do computador, incluindo o modelo mais bem conhecido: a máquina de Turing. A teoria da complexidade é o estudo da tratabilidade por computador; alguns problemas, apesar de serem teoricamente solúveis por computador, são tão caros em termos de tempo ou espaço que sua resolução é praticamente inatingível, até mesmo com o avanço rápido do hardware dos computadores. Um problema famoso é o problema "**P** = **NP**?", um dos Problemas do Prêmio Millennium.[10] Finalmente, a teoria da informação está interessada com a quantidade de dados que pode ser armazenada em um dado meio, e portanto lida com conceitos como compressão e entropia.

			
Lógica matemática	Teoria dos conjuntos	Teoria das categorias	Teoria da computação

Matemática pura

Quantidades

O estudo de quantidades começa com os números, primeiro os familiares números naturais, depois os inteiros, e as operações aritméticas com eles, que é chamada de aritmética. As propriedades dos números inteiros são estudadas na teoria dos números, dentre eles o popular Último Teorema de Fermat. A teoria dos números também inclui dois grandes problemas que ainda não foram resolvidos: conjectura dos primos gêmeos e conjectura de Goldbach.

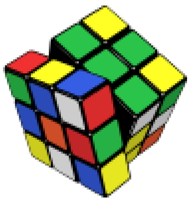
Conforme o sistema de números foi sendo desenvolvido, os números inteiros foram considerados como um subconjunto dos números racionais. Esses, por sua vez, estão contidos dentro dos números reais, que são usados para representar quantidades contínuas. Números reais são parte dos números complexos. Esses são os primeiros passos da hierarquia dos números que segue incluindo quaterniões e octoniões.

Considerações sobre os números naturais levaram aos números transfinitos, que formalizam o conceito de contar até o infinito. Outra área de estudo é o tamanho, que levou aos números cardinais e então a outro conceito de infinito: os números Aleph, que permitem uma comparação entre o tamanho de conjuntos infinitamente largos.

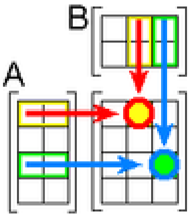
Números naturais	Números inteiros	Números racionais	Números reais	Números complexos
Aritmética	Constante matemática	Número ordinal	Número cardinal	

Estrutura

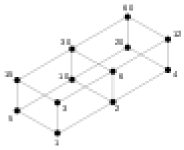
Muitos objetos matemáticos, tais como conjuntos de números e funções matemáticas, exibem uma estrutura interna. As propriedades estruturais desses objetos são investigadas através do estudo de grupos, anéis, corpos e outros sistemas abstratos, que são eles mesmos tais objetos. Este é o campo da álgebra abstrata. Um conceito importante é a noção de vetor, que se generaliza quando são estudados os espaço vetorial em álgebra linear. O estudo de vetores combina três das áreas fundamentais da matemática: quantidade, estrutura e espaço.



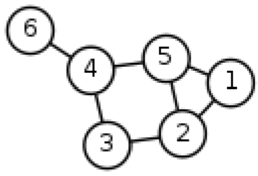
Álgebra abstrata



Álgebra linear



Teoria da ordem



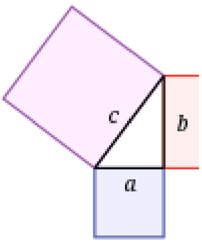
Teoria dos grafos

Teoria dos operadores

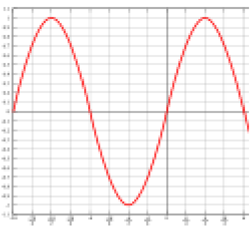
Espaço

O estudo do espaço originou-se com a geometria[11] - em particular, com a geometria euclidiana. Trigonometria combina o espaço e os números, e contém o famoso teorema de Pitágoras. O estudo moderno do espaço generaliza essas ideias para incluir geometria de dimensões maiores, geometria não-euclidiana (que tem papel central na relatividade geral) e topologia. Quantidade e espaço juntos fazem a geometria analítica, geometria diferencial, e geometria algébrica.

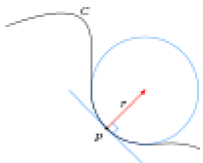
Topologia



Geometria



Trigonometria



Geometria

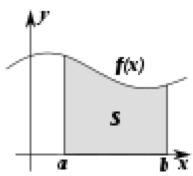
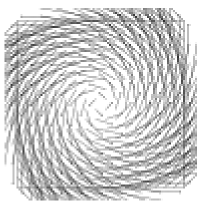
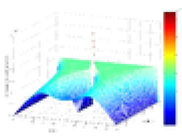
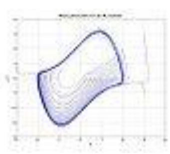
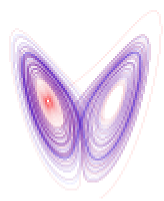
Geometria

			diferencial	fractal

Transformações

Entender e descrever uma transformação é um tema comum na ciência natural e cálculo foi desenvolvido como uma poderosa ferramenta para investigar isso. Então as funções foram criadas, como um conceito central para descrever uma quantidade que muda com o passar do tempo. O rigoroso estudo dos números reais e funções reais são conhecidos como análise real, e a análise complexa a equivalente para os números complexos.

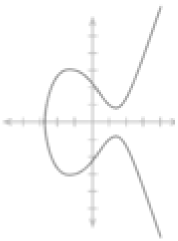
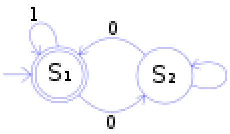
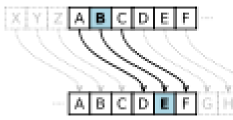
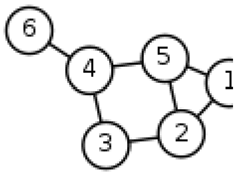
A hipótese de Riemann, uma das mais fundamentais perguntas não respondidas da matemática, é baseada na análise complexa. Análise funcional se foca no espaço das funções. Uma das muitas aplicações da análise funcional é a Mecânica quântica. Muitos problemas levaram naturalmente a relações entre a quantidade e sua taxa de mudança, e esses problemas são estudados nas equações diferenciais. Muitos fenômenos da natureza podem ser descritos pelos sistemas dinâmicos; a teoria do caos descreve com precisão os modos com que muitos sistemas exibem um padrão imprevisível, porém ainda assim determinístico.

				
Cálculo	Cálculo vetorial	Equações diferenciais	Sistema dinâmico	Teoria do caos

Matemática discreta

> あ→A **Esta seção está a ser traduzida** de «*Mathematics*» na Wikipédia em inglês Ajude e colabore com a tradução. *(Agosto de 2013)*

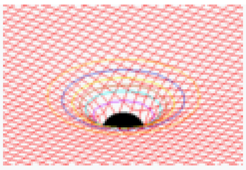
Matemática discreta é o nome comum para o campo da matemática mais geralmente usado na teoria da computação. Isso inclui a computabilidade, complexidade computacional e teoria da informação. Computabilidade examina as limitações dos vários modelos teóricos do computador, incluindo o mais poderoso modelo conhecido - a máquina de Turing.

				
Teoria de números	Combinatória	Teoria da computação	Criptografia	Teoria de grafos

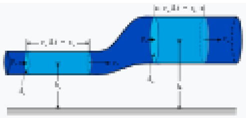
Matemática aplicada

Matemática aplicada considera o uso de ferramentas abstratas de matemática para resolver problemas concretos na ciência, negócios e outras áreas. Um importante campo na matemática aplicada é a estatística, que usa a teoria das probabilidades como uma ferramenta e permite a descrição, análise e predição de fenômenos onde as chances tem um papel fundamental. Muitos estudos de experimentação, acompanhamento e observação requerem um uso de estatísticas.

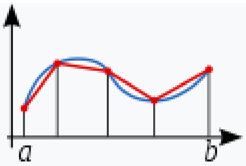
Análise numérica investiga métodos computacionais para resolver eficientemente uma grande variedade de problemas matemáticos que são tipicamente muito grandes para a capacidade numérica humana; isso inclui estudos de erro de arredondamento ou outras fontes de erros na computação.

- 

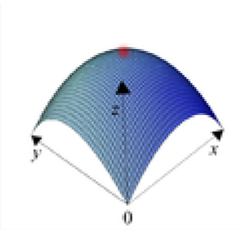
  Física matemática

- 

  Mecânica dos fluidos

- 

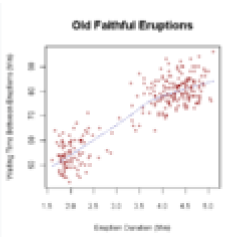
  Análise numérica

- 

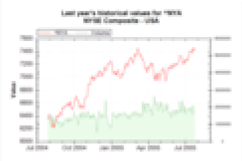
  Otimização

- 

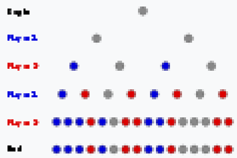
  Teoria das probabilidades

- 

Estatística

- 

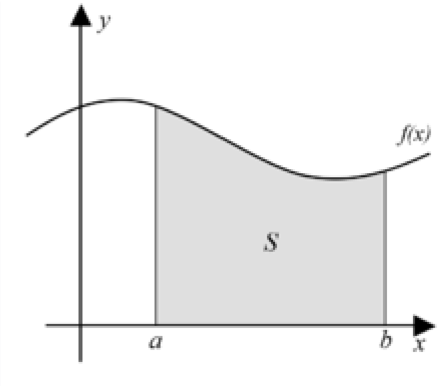
Matemática financeira

- 

Teoria dos jogos

2- CÁLCULO MATEMÁTICO: COMO SE DEU

O **cálculo diferencial e integral**, ou simplesmente **cálculo**, é um ramo importante da matemática, desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria, que se dedica ao estudo de taxas de variação de grandezas (como a inclinação de uma reta) e a acumulação de quantidades (como a área debaixo de uma curva ou o volume de um sólido). Onde há movimento ou crescimento em que forças variáveis agem produzindo aceleração, o cálculo é a matemática a ser empregada. Foi criado como uma ferramenta auxiliar em várias áreas das ciências exatas. Desenvolvido simultaneamente por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e por Isaac Newton (1643-1727), em trabalhos independentes.



O cálculo permite calcular a área da região assinalada.

O cálculo tem inicialmente três "operações-base", ou seja, possui áreas iniciais como o cálculo de limites, o cálculo de derivadas de funções e a integral de diferenciais. Com o advento do Teorema Fundamental do Cálculo, estabeleceu-se uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. O cálculo diferencial surgiu do problema da tangente, enquanto o cálculo integral surgiu de um problema aparentemente não relacionado, o problema da área.

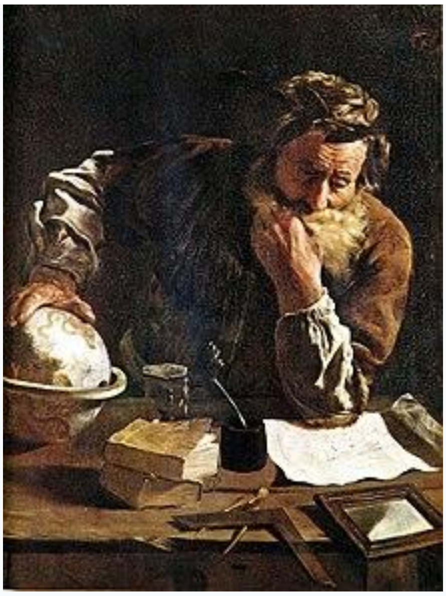
O professor de Isaac Newton em Cambridge, Isaac Barrow, descobriu que esses dois problemas estão de fato estritamente relacionados, ao perceber que a derivação e a integração são processos inversos. Foram Leibniz e Newton que exploraram essa relação e a utilizaram para transformar o cálculo em um método matemático sistemático. Particularmente ambos viram que o Teorema Fundamental os capacitou a calcular áreas e integrais muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de soma (método descrito pelo matemático Riemann, pupilo de Gauss). A integral indefinida também pode ser chamada de antiderivada, uma vez que é um processo que inverte a derivada de funções. Já a integral definida, inicialmente definida como Soma de Riemann, estabelece limites de integração, ou seja, é um processo estabelecido entre dois intervalos bem definidos, daí o nome integral definida.

O cálculo diferencial e o cálculo integral auxiliam em vários conceitos e definições na matemática, química, física clássica, física moderna e economia. O estudante de cálculo deve ter um conhecimento em certas áreas da matemática, como funções (modular, exponencial, logarítmica, par, ímpar, afim e segundo grau, por exemplo), trigonometria, polinômios, geometria plana, espacial e analítica, pois são a base do cálculo.

História

A história do cálculo encaixa-se em vários períodos distintos, de forma notável nas eras antiga, medieval e moderna.

Antiguidade



De acordo com Gauss, Arquimedes, o maior matemático da antiguidade, já apresentava ideias relacionadas ao Cálculo dois séculos antes de Cristo.

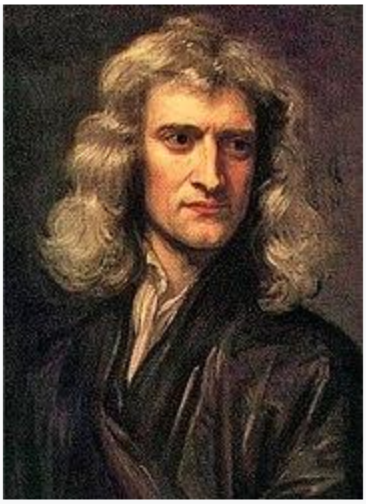
Na Antiguidade, foram introduzidas algumas ideias do cálculo integral, embora não tenha havido um desenvolvimento dessas ideias de forma rigorosa e sistemática. A função básica do cálculo integral, a de calcular volumes e áreas, pode ser remontada ao Papiro Egípcio de Moscou (1850 A.C.), no qual um egípcio trabalhou o volume de um *frustum* piramidal. O cálculo integral também pode ser utilizado para rastreamento e gravação o movimento do sol, da lua e dos planetas. Os antigos astrônomos babilônios (1800-1600 a.C.) empregaram métodos geométricos sofisticados que prenunciam o desenvolvimento do cálculo para prever as posições dos corpos celestes[1][2]. Eudoxo de Cnido, ou Eudoxus, (408-355 a.C.) usou o método da exaustão para calcular áreas e volumes. Arquimedes (287-212 a.C.) levou essa ideia além, inventando a heurística, que se aproxima do cálculo integral. O método da exaustão foi redescoberto na China por Liu Hui no século III, que o usou para encontrar a área do círculo. O método também foi usado por Zu Chongzhi século V, para achar o volume de uma esfera.

Idade Média

Na Idade Média, o matemático indiano Aryabhata usou a noção infinitesimal em 499 d.C. expressando-a em um problema de astronomia na forma de uma equação diferencial básica. Essa equação levou Bhāskara II no século XII a desenvolver uma derivada prematura representando uma mudança infinitesimal, e ele desenvolveu também o que seria uma forma primitiva do "Teorema de Rolle".

No século XII, o matemático persa Sharaf al-Din al-Tusi descobriu a derivada de polinômios cúbicos, um resultado importante no cálculo diferencial. No século XIV, Madhava de Sangamagrama, juntamente com outros matemáticos-astrônomos da Escola Kerala de Astronomia e Matemática, descreveu casos especiais da Série de Taylor, que no texto são tratadas como Yuktibhasa.

Idade Moderna



Sir Isaac Newton aplicou o cálculo às suas leis do movimento e a outros conceitos matemáticos-físicos.

Na Idade Moderna, descobertas independentes no cálculo foram feitas no início do século XVII no Japão por matemáticos como Seki Kowa, que expandiu o método de exaustão. Na Europa, a segunda metade do século XVII foi uma época de grandes inovações. O Cálculo abriu novas oportunidades na física-matemática de resolver problemas muito antigos que até então não haviam sido solucionados. Muitos matemáticos contribuíram para essas descobertas, notavelmente John Wallis e Isaac Barrow. James Gregory proveu um caso especial do segundo teorema fundamental do cálculo em 1668.

Coube a Gottfried Wilhelm Leibniz e a Isaac Newton recolher essas ideias e juntá-las em um corpo teórico que viria a constituir o cálculo. A ambos é atribuída a simultânea e independente invenção do cálculo. Leibnitz foi originalmente acusado de plagiar os trabalhos não publicados de Isaac Newton; hoje, porém, é considerado o inventor do cálculo, juntamente com Newton. Historicamente Newton foi o primeiro a aplicar o cálculo à física ao passo que Leibniz desenvolveu a notação utilizada até os dias de hoje, a notação de Leibniz. O argumento histórico para conferir aos dois a invenção do cálculo é que ambos chegaram de maneiras distintas ao teorema fundamental do cálculo.

Gottfried Wilhelm Leibniz: o inventor do cálculo, juntamente com Newton.

Quando Newton e Leibniz publicaram seus resultados, houve uma grande controvérsia de qual matemático (e portanto que país: Inglaterra ou Alemanha) merecia o crédito. Newton derivou seus resultados primeiro, mas Leibniz publicou primeiro. Newton argumentou que Leibniz roubou ideias de seus escritos não publicados, que Newton à época compartilhara com alguns poucos membros da Sociedade Real. Esta controvérsia dividiu os matemáticos ingleses dos matemáticos alemães por muitos anos. Um exame cuidadoso dos escritos de Leibniz e Newton mostra que ambos chegaram a seus resultados independentemente, com Leibniz iniciando com integração e Newton com diferenciação. Nos dias de hoje tem-se que Newton e Leibniz descobriram o cálculo independentemente. Leibniz, porém, foi quem deu o nome cálculo à nova disciplina, Newton a chamara de "A ciência dos fluxos".

Desde o tempo de Leibniz e Newton, muitos matemáticos contribuíram para o contínuo desenvolvimento do cálculo.

Idade contemporânea

Maria Gaetana Agnesi

Na Idade Contemporânea, já no século XIX, o cálculo foi abordado de uma forma muito mais rigorosa. Foi também durante este período que ideias do cálculo foram generalizadas ao espaço euclidiano e ao plano complexo. Lebesgue mais tarde generalizou a noção de integral. Sobressaíram matemáticos como Cauchy, Riemann, Weierstrass e Maria Gaetana Agnesi. Esta foi autora da primeira obra a unir as ideias de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz; escreveu também um dos primeiros livros sobre cálculo diferencial e integral [3]. É dela também a autoria da chamada "curva de Agnesi".

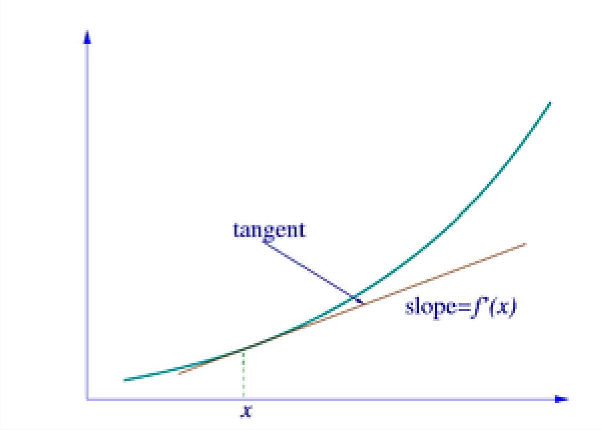
Princípios

Limites e Infinitesimais

O cálculo é comumente utilizado pela manipulação de quantidades muito pequenas. Historicamente, o primeiro método de utilizá-lo era pelas infinitesimais. Estes objetos podem ser tratados como números que são, de alguma forma, "infinitamente pequenos". Na linha numérica, isso seria locais onde não é zero, mas possui "zero" de distância de zero. Nenhum número diferente de zero é um infinitesimal, porque sua distância de zero é positiva. Qualquer múltiplo de um infinitesimal continua sendo um infinitesimal. Em outras palavras, infinitesimais não satisfazem a propriedade arquimediana. Deste ponto de vista, o cálculo é uma coleção de técnicas para manipular infinitesimais. Tal pensamento foi ignorado no século XIX porque era muito difícil ter a noção precisa de uma infinitesimal. Entretanto, o conceito foi reutilizado no século XX com a introdução da análise não padronizada, a qual propiciou fundamentos sólidos para a manipulação de infinitesimais

No século XIX, infinitesimais foram substituídos pelos limites. Limites descrevem o valor de uma função em um certo ponto a partir de valores da função em pontos próximos de .[4] Um exemplo tradicional de interesse é o caso em que é um número irracional, como ou , podendo ter seu valor decimal aproximado por números racionais próximos.[4] Outro caso é quando, ao tentar avaliar uma função em , obtém-se uma divisão por zero, que é indefinida.[4] Eles capturam o comportamento numérico em baixa escala, como nas infinitesimais, mas utilizando números ordinários. Deste ponto de vista, calculo é uma coleção de técnicas para a manipulação de certos limites. As infinitesimais foram substituídas por números muito pequenos, e o comportamento infinitamente pequeno da função é encontrado pelo limite de números cada vez menores. Limites são fáceis de serem colocados em fundações rigorosas e, por esse motivo, são a abordagem padrão para o cálculo.

Derivadas



Reta tangente em (x, $f'(x)$).

O cálculo diferencial é o estudo da definição, propriedade e aplicações da derivada ou deslocamento de um gráfico. O processo de encontrar a derivada é chamado "diferenciação". Em linguagem técnica, a derivada é um operador linear, o qual forma uma nova função a partir da função original, em que cada ponto da nova função é o deslocamento da função original.

O conceito de derivada é fundamentalmente mais avançado do que os conceitos encontrados em álgebra. Nessa matéria, os estudantes aprendem sobre funções em que o número de entrada gera um número de saída. Por exemplo, se no dobro da função é inserido 3, então a saída é 6, enquanto se a função é quadrática, e é inserido 3, então a saída é 9. Mas na derivada, a entrada é uma função e a saída é outra função. Por exemplo, se na derivada é colocada uma função quadrada, então a saída é o dobro de uma função, porque o dobro da função fornece o deslocamento da função quadrática em qualquer ponto dado da função.

Para entender a derivada, os estudantes precisam aprender a notação matemática. Na notação matemática, um símbolo comum para a derivada da função é um sinal de apóstrofo chamado "linha". Então a derivada de *f* é *f* ' (f linha). Isso em notação matemática seria escrito assim:

Se a função de entrada é o tempo, então a derivada dessa função é a taxa em que a função é alterada.

Se a função é linear, ou seja, o gráfico da função é uma linha reta, então a função pode ser escrita como $y = m x + b$, onde:

Isto dá o valor exato para a variação da linha reta. Se a função não é uma linha reta, então a variação em y é dividida pela variação em x, e nós precisamos do cálculo para encontrar o valor exato em cada ponto da função. (Note-se que y e $f(x)$ são duas notações diferentes para a mesma coisa: a saída da função). Uma linha entre dois pontos em uma curva é chamado de reta secante. A variação da reta secante pode ser expressada como:

onde as coordenadas do primeiro ponto é (x, f(x)) e h é a distância horizontal entre os dois pontos.

Para determinar o deslocamento da curva, usam-se os *limites*:

Em um caso particular, nós encontramos o deslocamento da função quadrática no ponto em que a entrada é 3 e a saída é 9 (Ex.: então).

O deslocamento da função quadrática no ponto (3, 9) é 6, isto é, ele cresce seis vezes mais rápido em y do que em x e está indo para a direita.

Integrais

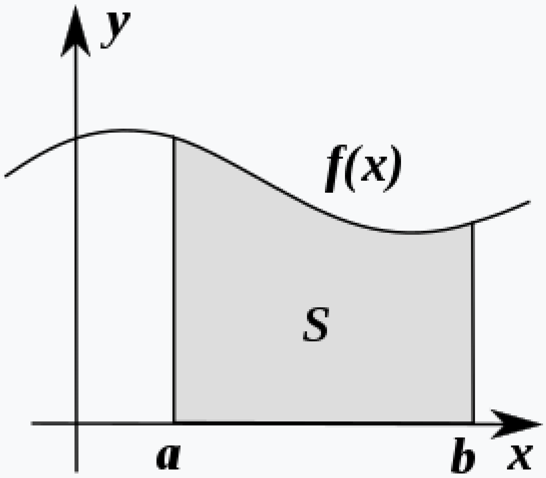
O **Cálculo Integral** é o estudo das definições, propriedades, e aplicações de dois conceitos relacionados, as *integrais indefinidas* e as *integrais definidas*. O processo de encontrar o valor de uma integral é chamado *integração*. Em linguagem técnica, o calculo integral estuda dois operadores lineares relacionados.

A **integral indefinida** é a *antiderivada*, o processo inverso da derivada. F é uma integral indefinida de *f* quando *f* é uma derivada de F. (O uso de letras maiúsculas e minúsculas para uma função e sua integral indefinida é comum em cálculo.)

A **integral definida** insere uma função e extrai um número, o qual fornece a área entre o gráfico da função e o eixo do x. A definição técnica da integral definida é o limite da soma das áreas dos retângulos, chamada Soma de Riemann.

Um exemplo motivacional é a distância (**D**) viajada em um determinado tempo (**t**).

Se a velocidade (**V**) é constante, somente multiplicação é necessária, mas se a velocidade varia, então precisamos de um método mais poderoso para encontrar a distância. Um método é a aproximação da distância viajada pela divisão do tempo em muito mais intervalos de tempo, e então multiplicando o tempo em cada intervalo por uma das velocidades naquele intervalo, e então fazer uma Soma de Riemann das distâncias aproximadas viajadas em cada intervalo. A ideia básica é que se somente um pequeno tempo passar, então a velocidade vai permanecer praticamente a mesma. Entretanto, uma Soma de Riemann somente da uma aproximação da distância viajada. Nós precisamos pegar o limite de todas as Somas de Riemann para encontrar a distância viajada exata.



Integração pode ser explicada neste exemplo, como a medida da área compreendida entre a curva *f*(*x*) e o eixo *x*, limitada pelos pontos *a* e *b*.

Se *f(x)* no diagrama da esquerda representa a velocidade variando de acordo com o tempo, a distância viajada entre os tempos representados por *a* e *b* é a área da região escura *s*.

Para aproximar a área, um método intuitivo seria dividir em distâncias entre *a* e *b* em um número de segmentos iguais, a distância de cada segmento representado pelo símbolo *?x*. Para cada segmento menor, nós podemos escolher um valor da função *f*(*x*). Chame o valor *h*. Então a área do retângulo com a base *?x* e altura *h* dá a distância (tempo *?x* multiplicado pela velocidade *h*) viajado naquele segmento. Associado com cada segmento é o valor médio da função sobre ela,*f(x)*=h. A soma de todos os retângulos dados é uma aproximação da área entre o eixo e a curva, o qual é uma aproximação da distância total viajada. Um valor menor para *?x* nos dará mais retângulos e, na maioria dos casos uma melhor aproximação, mas para uma resposta exata nós precisamos fazer o limite em *?x* tender a zero.

O símbolo da integração é um *S* alongado (que significa "soma"). A integral definida é escrita da forma:

e lida como "a integral de *a* até *b* de *f*-de-*x* em relação a *x*."

A integral indefinida, ou antiderivada, é escrita da forma:

Desde que a derivada da função é (onde *C* é qualquer constante), então:

Conceitos básicos

Função, domínio e imagem

Seja um conjunto de pontos **A**, cujos membros são os números em então tomamos e denominamo-la **variável independente**, visto que, arbitrariamente, lhe podemos atribuir qualquer valor em e portanto dizemos que:

A é o **domínio** da variável

Da mesma forma, admitamos um conjunto de pontos **B**, cujos membros são números que são obtidos única e exclusivamente por um conjunto de regras matemáticas , quando números arbitrários em **A** lhe são transferidos; visto que há um único valor assumido para cada valor arbitrário transferido a , dizemos que:

B é **função** de **A**.

Sendo **B** obtido através das regras de

A é **domínio** da função

Da mesma forma, como **B** é restrito aos valores definidos por **A** e às regras definidas por os seus elementos espelham estas condições, portanto, podemos dizer que:

B é **imagem** da função

Extensões de domínios

Observe-se a expressão: Nota-se que, assim que são atribuídos valores a ela assumirá valores inválidos, ou seja, de raízes quadradas de números negativos. Para sanar este problema, pode-se atribuir uma faixa de valores válidos para o domínio de o que resultará em:

Assim, tem-se um domínio restrito a valores iguais ou menores que 12. Portanto, incluindo-o, este extremo ao qual pertence o valor 12 é chamado de **extremo fechado**.

Tem-se uma situação semelhante, porém com uma sutil diferença, quando for necessário fazer: . Neste caso, é preciso restringir o valor 0 e todos os números abaixo dele, desta forma:

Pode-se atribuir apenas valores maiores que 0, uma vez que este valor não pertence ao conjunto de números que podem ser atribuídos à variável, o que se denomina de **extremo aberto**.

Notações

O conjunto de números **B** dos quais dependem do conjunto **A** de onde se obtem e se estabelece o par de números ou simplesmente:

Este é chamado de **par ordenado**.

Sendo também a representação dos valores de então pode-se afirmar que:

Sendo o valor de , quando definido pelas operações em

Faixas de valores que delimitam os domínios podem ser representados com desigualdades, como nos exemplos abaixo:

Porém, os extremos podem ser colocados em um par entre delimitadores de forma que, para os extremos fechados usa-se os delimitadores [ou]. Para os extremos abertos usa-se (ou), habilitando a identificar os extremos mais claramente. Assim, pode-se identificar os domínios do exemplo acima desta forma:

Também é comum usar colchetes invertidos para extremos abertos:

Operações com funções

Considere-se duas funções *f* e *g*; admitindo que as duas são, intuitivamente, expressões que se traduzem em valores, pode-se dizer que:

Sendo *D(f)* o domínio da função *f* e *D(g)* o domínio da função *g*, o domínio da função resultante das operações acima é sempre:

Teorema Fundamental do Cálculo

O teorema fundamental do cálculo afirma que a diferenciação e a integração são operações inversas. Mais precisamente, o teorema conecta os valores de antiderivadas ao valor de integrais definidas. Por ser usualmente mais fácil computar uma antiderivada do que aplicar a definição de uma integral definida, o teorema fundamental do cálculo provê uma forma prática de computar integrais definidas. Pode também ser interpretado como uma afirmação precisa do fato que a diferenciação é o inverso da integração.

É afirmado pelo teorema fundamental do cálculo que: Se uma função *f* é contínua no intervalo [*a*, *b*] e se *F* é uma função cuja derivada é *f* no intervalo (*a*, *b*), então

Além disso, para cada x no intervalo (*a*, *b*) temos que

E, seu Corolário pode ser transcrito da seguinte forma:

Considere-se *f* uma função contínua de valores reais definida em um intervalo fechado [*a*, *b*]. Se *F* é uma função tal que para todo *x* em [*a*, *b*]

então

e

Essa descoberta, realizada por Newton e Leibniz, que se basearam nos resultados de um trabalho anterior de Isaac Barrow, exerceu um papel chave na massiva proliferação de resultados analíticos que se seguiram após seus trabalhos ficarem conhecidos. O Teorema fundamental do cálculo provê um método algébrico de computar muitas integrais definidas sem executar processos limite—simplesmente por encontrar fórmula para antiderivadas.

Aplicações

O cálculo é usado em todos os ramos das ciências físicas, na ciência da computação, estatística, engenharia, economia, medicina e em outras áreas sempre que um problema possa ser modelado matematicamente e uma solução ótima é desejada, ele é um estudo mais profundo de funções.

A Física faz uso intensivo do cálculo. Todos os conceitos na mecânica clássica são inter-relacionados pelo cálculo. A massa de um objeto de densidade conhecida, o momento de inércia dos objetos, assim como a energia total de um objeto dentro de um sistema fechado podem ser encontrados usando o cálculo. Nos sub-campos da eletricidade e magnetismo, o cálculo pode ser usado para encontrar o fluxo total de campos eletromagnéticos. Um exemplo mais histórico do uso do cálculo na física é a segunda lei de Newton que usa a expressão "taxa de variação" que se refere à derivada: *A* ***taxa de variação*** *do momento de um corpo é igual à força resultante que age sobre o corpo e na mesma direção.* Até a expressão comum da segunda lei de Newton como Força = Massa × Aceleração envolve o cálculo diferencial porque a aceleração pode ser expressada como a derivada da velocidade. A teoria do Eletromagnetismo de Maxwell e a teoria da relatividade geral de Einstein também são expressas na linguagem do cálculo diferencial. A química também usa o cálculo para determinar as variações na velocidade das reações e no decaimento radioativo.

O cálculo pode ser usado em conjunto com outras disciplinas matemáticas. Por exemplo, ele pode ser usado com a álgebra linear para encontrar a reta que melhor representa um conjunto de pontos em um domínio.

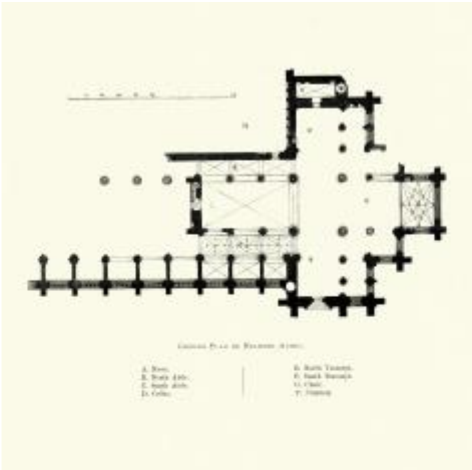
Na esfera da medicina, o cálculo pode ser usado para encontrar o ângulo ótimo na ramificação dos vasos sanguíneos para maximizar a circulação, e até mesmo determinar o tamanho máximo de moléculas que são capazes de atravessar a membrana plasmática em uma determinada situação, normal ou induzida, em células.

Na geometria analítica, o estudo dos gráficos de funções, o cálculo é usado para encontrar pontos máximos e mínimos, a inclinação, concavidade e pontos de inflexão.Na Engenharia civil é usado para encontrar o momento fletor máximo de uma viga num ponto qualquer.

Na Economia o cálculo permite a determinação do lucro máximo fornecendo uma fórmula para calcular facilmente tanto o custo marginal quanto a renda marginal.

O cálculo pode ser usado para encontrar soluções aproximadas de equações, em métodos como o método de Newton, iteração de ponto fixo e aproximação linear. Por exemplo, naves espaciais usam uma variação do método de Euler para aproximar trajetórias curvas em ambientes de queda livre.

3- ALICERCES DA MATEMÁTICA MODERNA



Muitos dos textos mais importantes que a humanidade escreveu contêm símbolos como ∈, ⊆, e ∅ nas primeiras páginas do capítulo 1. Nesta reportagem especial, quatro professores mostram as conexões da teoria dos conjuntos com a álgebra, a geometria, a lógica.

{1}/ Não cai no Enem, mas é importante

Um grupo de alunos do ensino médio entra na sala de aula e vê o professor sentado à mesa, já esperando; na lousa, há uma única expressão:

$$\forall = \{(x,\lambda) \in \mathbb{B}_2 : (x_2 + \lambda_2 - 1 = 0) \vee (2x + 3\lambda - 2 = 0)\}$$

Quem não está familiarizado com o estado atual do ensino básico talvez imagine que acontecerá algo mais ou menos assim:

(a) Os alunos se acomodam e, a certa altura, encerram as conversas e passam a olhar para o professor, à espera de esclarecimentos.

(b) Alguém não aguenta de curiosidade e acaba perguntando: “Professor, o que é isso? Parece difícil!”

(c) Alguém examina a expressão por um tempinho e diz, em voz alta e com gosto: “Oba! Adoro estudar o modo como duas curvas se interceptam!”

(*Na seção 2, verá diversas maneiras de interpretar a expressão.*)

Bem, em muitas classes Brasil afora não vai acontecer nada disso. Os alunos vão bater os olhos na expressão, registrar o fato de que não a compreendem, e usar isso como justificativa para continuar conversando, para assistir a um vídeo qualquer no YouTube (via celular), para jogar; vão agir com o propósito descarado de fazer o professor perceber que não conseguiu despertar a curiosidade de ninguém. “Houve um tempo”, diz Marco Bassetto, professor de matemática na escola Pueri Domus, em Campinas (SP), “em que a simples presença do professor em sala de aula era suficiente para que os alunos parassem o que estavam fazendo e começassem a prestar atenção. Hoje, o aluno olha para o professor com um olhar do tipo ‘o cara que fala um monte de coisas sobre as quais não entendo nada’, do tipo ‘isso é muito chato, vou jogar videogame’.” Esse tempo, diz Marco, nem foi há tanto tempo assim: há uns 20 anos, se a classe fosse minimamente disciplinada, esperaria alguma informação sobre o conjunto *A* com algum interesse.

Se Marco tem o propósito de passar alguma ideia importante da teoria dos conjuntos, começa com um problema. Eis algo do tipo que projetaria no quadro branco, para ficar à espera dos alunos:

(i) Os animais que ninguém consegue ver durante o crepúsculo são cinza.

(ii) Os vizinhos não gostam das coisas que os mantêm acordados.

(iii) Qualquer coisa que dorme pesadamente ronca ruidosamente.

(iv) Os vizinhos gostam de animais que podem ver durante o crepúsculo.

(v) Todos os elefantes dormem pesadamente.

(vi) Qualquer coisa que ronca ruidosamente acorda os vizinhos.

Problema: O que você pode concluir a respeito dos elefantes?

O que Marco puder passar sobre a teoria dos conjuntos, usando esse problema como desculpa, vai passar; mas, assim que os alunos perdem o interesse pelo problema, o que não costuma demorar mais que meia hora, Marco interrompe as explicações sobre a teoria e provoca a classe de alguma maneira — por exemplo, propõe um problema correlato. E assim, de problema em problema, de provocação em provocação, tenta manter os alunos interessados; enquanto dura o interesse, passa a teoria que é possível passar naqueles minutos. [*Para uma discussão do problema dos elefantes, veja a seção 2*.] Ele tem inveja dos professores de inglês, que podem separar os alunos por competência e formar turmas mais fluentes. "Como eu gostaria de fragmentar minhas turmas", diz Marco. "Seria bom ter dois níveis para o primeiro ano do ensino médio, dois para o segundo… Percebe?" Uma classe mais avançada compreende melhor a importância de descobrir de que se trata o conjunto *A*.

Os monstros do MMM. Quase todos os professores do ensino básico ficam pouco à vontade para conversar sobre a teoria dos conjuntos. Eles sabem que a teoria é importante. Sabem que, se um estudante não a domina, não consegue compreender direito ideias mais sofisticadas: relações e funções, cálculo diferencial e integral, álgebra linear, grupos e morfismos, topologia, lógica, entre tantas outras. Sabem que a teoria dos conjuntos serve para discutir as bases da matemática que já existe, e serve também como uma espécie de cimento com o qual adicionam novas porções de matemática à matemática que já existe. Já ouviram falar da frase do matemático alemão Hermann Weyl (1885-1955): a matemática não é a ciência das quantidades, ou mesmo a ciência dos padrões, mas sim "a ciência do $\in$". "O grande lance da matemática", diz Alexandre Casassola Gonçalves, professor no departamento de física e matemática da USP em Ribeirão Preto (SP), "é encontrar certos conjuntos e certos elementos dentro desses conjuntos. Isso resume bem o trabalho do pesquisador."

Ao mesmo tempo, contudo, os professores sabem que todo mundo conhece um pouco da teoria (mesmo que não tenha consciência disso), pois a ideia de conjunto talvez seja a mais primitiva da matemática — talvez seja a mais primitiva da mente humana. "Ninguém pode comunicar um raciocínio, por mais simples que seja, sem recorrer à ideia de conjunto", diz Alexandre. A própria locução "um raciocínio" remete ao conjunto dentro do qual estão os raciocínios aos quais uma pessoa pode recorrer. Então o estudante, diante das primeiras explicações sobre a teoria dos conjuntos, se rebela e pensa: "Por que o professor está complicando uma coisa tão óbvia com esse monte de símbolos matemáticos?"

Para adicionar uma pitada de sal ao desconforto, os professores do ensino básico se lembram do movimento da matemática moderna (MMM). A começar na década de 1960, muitos professores acharam que a matemática escolar estava distante demais da pesquisa atual, o que era verdade. Acharam que as escolas de nível básico deveriam ensinar temas mais atuais, o que era ótima ideia. Mas o modo como fizeram isso foi um desastre. O currículo da escola básica ainda está distante demais da matemática atual, e continua sendo uma ótima ideia mostrar ao aluno o que significa de fato ser um matemático contemporâneo. Contudo, se alguém diz, "Ei! Tive uma ideia! Que tal ensinar a teoria dos conjuntos melhor, assim nossos alunos conseguem ler textos de autores mais recentes, e sobre temas mais sofisticados?", daí todo mundo recorda o MMM e foge correndo pela saída de emergência mais próxima. Se o professor de matemática fosse um polvo, durante a fuga ele até soltaria tinta preta atrás de si.

Além disso, o Enem não ajuda em nada. "Lanço um desafio a quem ainda acha que o movimento da matemática moderna faz sentido", diz Marco Bassetto. "Ao longo desses 17 anos de Enem, encontre cinco questões que exijam exclusivamente o domínio da teoria dos conjuntos." Marco chama a atenção para um fenômeno curioso: o responsável pelo currículo do ensino básico é o Ministério da Educação, e para o MEC a teoria dos conjuntos é essencial, a julgar pela documentação que deixa disponível no website. Quem prepara o Enem é o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), uma autarquia subordinada ao MEC. Mas, Brasil afora, para o bem e para o mal, os responsáveis pela educação de jovens no ensino médio estão seguindo o Inep. “O Enem tomou conta do ensino médio.”

Ciências matematizadas. Existe um subconjunto de todos os alunos cujos elementos se interessam bastante por conjuntos. Seus elementos são os estudantes que adoram matemática e os que têm a ambição de passar num vestibular difícil ou num concurso público. “Alguns de meus alunos”, diz Gustavo Quevedo Carvalho, do Colégio Militar de Porto Alegre (RS), “já descobriram que a teoria dos conjuntos tem tudo a ver com lógica, e como nos concursos públicos caem questões de lógica, eles se interessam pelos conjuntos.” Gustavo cita uma questão típica:

Problema. Sabe-se que existe pelo menos um gato que é cachorro; e sabe-se também que todo cachorro é rato. Portanto, necessariamente:

(a) Todo rato é cachorro.

(b) Todo rato é gato.

(c) Algum gato é rato.

(d) Nada que não seja rato é gato.

(e) Algum gato não é rato.

No Colégio Militar, mesmo os alunos que não conhecem direito a teoria dos conjuntos sabem que, se fossem mais versados na teoria, resolveriam uma questão dessas mais velozmente. “Procuro mostrar que, se uma pessoa conhece melhor os fundamentos da teoria dos conjuntos, ela consegue organizar as ideias e resolver problemas.” (*Veja a seção 2*.) Outro jeito de mostrar isso, que funciona bem mesmo com alunos imediatistas, é recorrer a problemas de probabilidade. Em pouco tempo o aluno percebe como é difícil compreender as ideias da probabilidade sem a teoria dos conjuntos, e, ao contrário, como é mais fácil compreendê-las com os conjuntos. Diz Marco Bassetto: “Começando com um problema de probabilidade, aí sim dá para falar sobre união, intersecção, complemento, diferença.” (*Sobre o professor Marco, veja a seção 3*.)

Qualquer que seja o estilo do professor e da escola, contudo, depois que o jovem entra na faculdade, topa com conjuntos aos montes; o processo de matematização da ciência está ocorrendo a ritmo cada vez maior. Livros sobre ecologia já lembram livros de matemática, com gráficos e fórmulas em abundância; um capítulo do excelente livro *O Gene Egoísta*, do zoólogo Richard Dawkins, trata apenas de teoria dos jogos, e o vocabulário lembra um texto sobre conjuntos. Até a filosofia atual está bastante matematizada; é difícil acompanhar uma discussão sobre *identidade ao longo do tempo*, por exemplo, sem conhecer bem a teoria dos conjuntos. Além disso, como os matemáticos recorrem à teoria dos conjuntos sempre, os símbolos que usam por fim vão parar nas páginas de livros de cognição, economia, mecânica dos fluidos, metafísica.

Por que os matemáticos são tão obcecados pela teoria dos conjuntos? Ora, quando conseguem expressar uma ideia com elementos da linguagem dos conjuntos, ela fica em bases bastante firmes. Por exemplo, a ideia de círculo. O estudante tem sobre a mesa do escritório um caderno com folhas quadriculadas, além de régua e compasso. Ele tem de abrir o compasso e colocar a ponta seca num ponto cujas coordenadas são comprimentos irracionais. E agora? Esse compasso é real ou imaginário? Se for real, não pode desenhar o círculo, pois a linha que vai desenhar tem largura e altura (a tinta, ou o grafite, tem largura e altura); mas a linha que perfaz um círculo não pode ter dimensões. E como pode pôr o compasso num ponto de coordenadas irracionais? Como vai acertá-lo em cheio?

Então, a folha de papel, o compasso e a régua são apenas objetos com os quais pode raciocinar a respeito de objetos abstratos. Mas, se é assim, para que papel, régua e compasso? Por que se atrapalhar com objetos? Em vez disso, por que não considera o círculo C como um conjunto de pares ordenados (x, y) tais que $(x – a)^2 + (y – b)^2 – r^2 = 0$? Ora, isso é um conjunto muito mencionado em livros sobre a teoria dos conjuntos: C = {(x, y) é um ponto no plano cartesiano tal que sua distância do ponto (a, b) é r}. Com essa providência, uma entidade misteriosa, o ponto sem dimensão, virou um par ordenado de números reais; o plano virou todos os pares ordenados possíveis; um círculo virou um subconjunto específico do plano, aquele cujos pontos satisfazem determinada equação; os pontos que pertencem ao círculo C viraram elementos de um subconjunto; e, ainda por cima, se houver uma reta L que corta o círculo em dois pontos, tais pontos estão no subconjunto $C \cap L$.
E assim vai. Agora a intersecção entre duas figuras geométricas virou a intersecção entre dois conjuntos. Os matemáticos são obcecados pela teoria dos conjuntos porque é difícil, senão impossível, imaginar um jeito mais simples, e ao mesmo tempo mais preciso, de pôr uma ideia matemática no papel. {❑}

{2}/ O conjunto A, mais elefantes, ratos, cachorros, gatos

O conjunto A. Como um estudante (condinome *YdO*) realizou o trabalho de decodificação? Em primeiro lugar, notou as chaves {}; em textos sobre matemática, elas quase sempre indicam um conjunto. (YdO sublinhou duas vezes a locução “quase sempre” porque, às vezes, indicam outra coisa.) E, se as chaves indicam um conjunto, ele foi batizado de A. YdO notou a estrutura tão popular: A = {propriedade comum a todos os elementos deste conjunto}.

Depois YdO passou para a descrição dos elementos do conjunto. Ela inclui um par ordenado de números reais, (x, y), tal que tanto x quanto y satisfazem ao mesmo tempo as duas equações à direita dos dois pontos. (Os dois pontos ":" podem ser lidos como "tal que" ou "tais que"; o mesmo vale para a barra vertical "|". O símbolo ∧ é o conectivo lógico "e", cujo funcionamento é mais estrito que o da palavra "e".)

Um bom passo é plotar o gráfico das duas equações no mesmo plano cartesiano, e foi o que YdO fez ao produzir a figura 1.

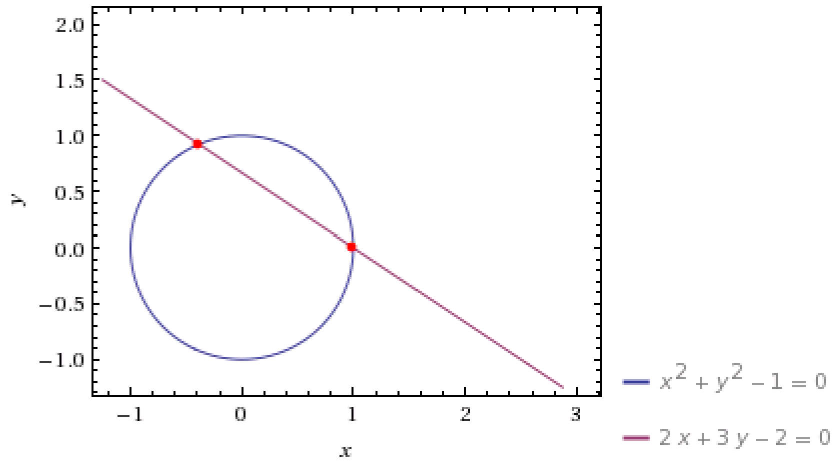


Figura 1

Olhando o gráfico, YdO teve a certeza de que podia ver o conjunto *A*, se quisesse, como um conjunto com dois pontos, ou com dois pares ordenados do tipo (x, y), sendo que os valores de cada variável deveriam satisfazer as duas equações ao mesmo tempo. (Uma das equações representa um círculo de raio unitário com centro na origem; a outra representa uma reta com gradiente negativo.) Como achar tais valores?

YdO usou a segunda equação para expressar x em função de y.

$$2x + 3y - 2 = 0 \rightsquigarrow$$
$$2x = 2 - 3y \rightsquigarrow$$
$$x = \frac{2 - 3y}{2}$$
$$= 1 - \frac{3}{2}y$$

Depois, colocou essa informação na primeira equação, a do círculo, para ver se descobria alguma coisa sobre *y*.

$$\left(1 - \frac{3}{2}y\right)^2 + y^2 - 1 = 0 \rightsquigarrow$$
$$1 - 3y + \frac{9}{4}y^2 + y^2 - 1 = 0 \rightsquigarrow$$
$$\frac{13}{4}y^2 - 3y = 0 \rightsquigarrow$$
$$y\left(\frac{13}{4}y - 3\right) = 0 \therefore$$
$$y = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{13}{4}y - 3 = 0 \rightsquigarrow$$
$$y = \frac{12}{13}$$

Com tais manipulações algébricas, descobriu os dois valores de *y* que tornam válidas as duas equações ao mesmo tempo. E daí simplesmente substituiu *y* na segunda equação pelos dois valores que descobriu, um de cada vez, e calculou os dois valores correspondentes de *x*: para $y = 0$, $x = 1$; para $y = 12/13$, $x = -5/13$. Com isso, representou o conjunto *A* de um jeito mais específico, mas completamente equivalente ao jeito anterior, a partir do qual começou:

$$A = \left\{ \left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13} \right), (1,0) \right\}$$

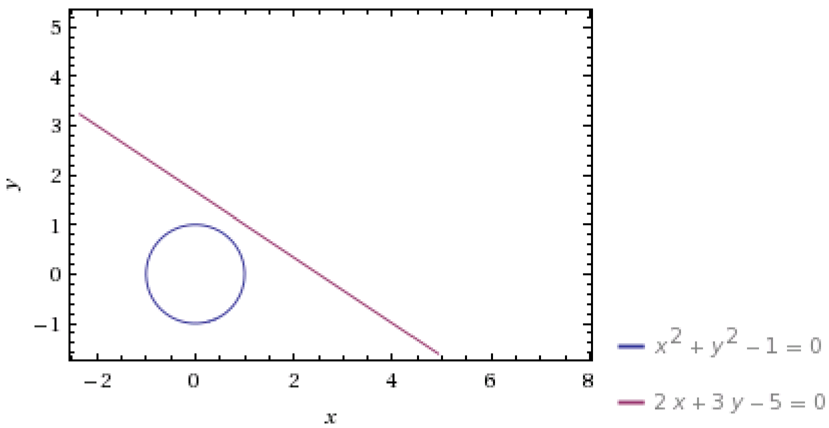
Essa linha funciona se o leitor já souber que o conjunto *A* se refere aos pares ordenados (ou aos pontos) que validam um sistema de equações simultâneas. Aliás, YdO descobriu que poderia descrever o conjunto *A* com o sistema em si:

$$A = \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 2x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

Muito estudante bateria os olhos nessa expressão e diria: “A letra *A* se refere a um sistema com duas equações simultâneas.” Poucos diriam: “A letra *A* se refere ao conjunto de pares ordenados (x, y) que satisfazem esse sistema de equações simultâneas.” Não interessa se o sistema não tem solução: de qualquer modo, ele representa um conjunto. Para ilustrar essa ideia, YdO mudou um pouco a segunda equação para criar o conjunto *B*.

$$B = \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

Então plotou as duas equações no mesmo sistema de coordenadas retangulares, e produziu a figura 2.



Agora as duas curvas não se interceptam. YdO escreveu o que isso significa:

$$B = \varnothing$$

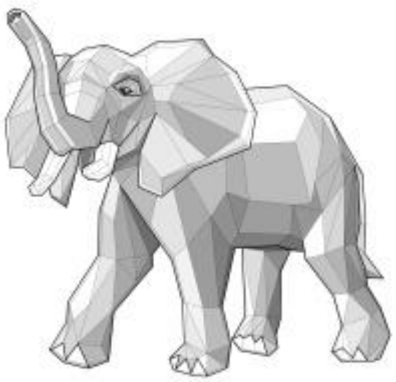
Em palavras, *B* é o conjunto vazio, e isso significa, em linguagem cotidiana, que os sistema não tem solução.

Se YdO quisesse, poderia ter representado *A* e *B* como sendo a interseção de dois outros conjuntos: um deles, com os pontos do círculo; o outro, com os pontos da reta. Por exemplo:

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 = 0\};$$
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y - 2 = 0\};$$
$$A = C \cap D = \left\{\left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right), (1,0)\right\}$$

YdO descobriu que ninguém precisa mencionar os conjuntos num texto, se não quiser. Em geral, o matemático usa a teoria dos conjuntos para aperfeiçoar suas descobertas e anotá-las de um jeito próximo da mais abstrata perfeição, mas nem sempre ele menciona os conjuntos ao escrever, por exemplo, a passagem de um artigo. Talvez, tendo já estudado os conjuntos *C*, *D*, e $A = C \cap D$, escrevesse algo assim: "Um círculo de raio igual a 1 e com centro na origem intercepta a reta $y = ⅔(1 – x)$ em dois pontos, nos quais os valores de *x* são –5/13 e 1." O leitor, se não tiver treinamento adequado, não pode imaginar que, para escrever essa frase, o autor estudou três conjuntos até ficar bem familiarizado com eles. Diz Felipe Fujita, professor no Colégio Albert Sabin em São Paulo (SP) e autor de livros didáticos: "É bom notar uma coisa importante: os matemáticos que desenvolveram a teoria dos conjuntos estavam interessados nas ideias. Eles introduziram a linguagem e o simbolismo por necessidade prática, mas o mais importante são as ideias. O mesmo deve ocorrer no ensino."

O matemático já sabe que, ao usar a geometria de coordenadas como referência, pode transformar qualquer assunto da geometria num assunto da teoria dos conjuntos. E foi isso o que os matemáticos fizeram ao longo do século 20. Hoje, um livro sobre geometria lembra um livro sobre teoria dos conjuntos, e é bem provável que contenha o símbolo $\in$ na primeira página do capítulo 1.



O problema dos elefantes. Aqui, o estudante (codinome *YdO*) começou listando os conjuntos que talvez lhe fossem úteis. São eles:

A = {As coisas que acordam os vizinhos.}

B = {As coisas que dormem pesadamente.}

C = {As coisas que roncam ruidosamente.}

D = {Os animais visíveis durante o crepúsculo.}

E = {Os elefantes.}

F = {As coisas das quais os vizinhos gostam.}

G = {As coisas de cor cinza.}

Com a afirmação (i), YdO descobriu que qualquer coisa que não esteja em D está em G, isto é:

$$\text{(i)} \quad D^C \subseteq G$$

(**Notação**: D^C é o complemento do conjunto D, isto é, contém os elementos do conjunto universo, ou do *universo do discurso*, que não são elementos de D.)

E, repetindo o procedimento, foi descobrindo coisas sobre os outros conjuntos:

$$\text{(ii)} \quad A \subseteq F^C$$

$$\text{(iii)} \quad B \subseteq C$$

$$\text{(iv)} \quad D \subseteq F$$

$$\text{(v)} \quad E \subseteq B$$

$$\text{(vi)} \quad C \subseteq A$$

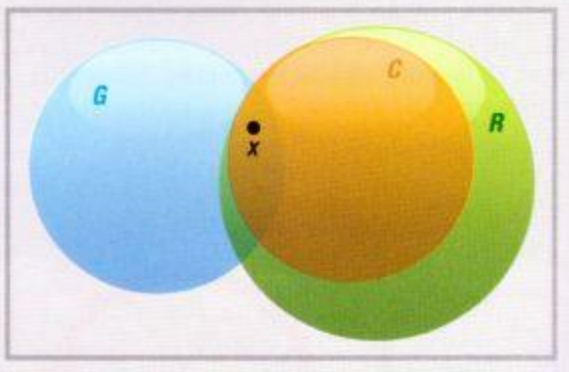
Visto que $D \subseteq F$, YdO pôde deduzir que $F^C \subseteq D^C$, e daí pôde encadear todos os subconjuntos um dentro do outro:

$$E \subseteq B \subseteq C \subseteq A \subseteq F^C \subseteq D^C \subseteq G$$

E com isso pôde afirmar, com certeza, que todos os elefantes são cinza. (Na verdade, se quisesse, poderia afirmar mais: “Todos os elefantes dormem pesadamente, roncam ruidosamente, e acordam os vizinhos; estão entre as coisas que os vizinhos detestam, e são invisíveis durante o crepúsculo. Talvez seja assim porque eles são cinza.”) Pensando no assunto, viu como operações lógicas complicadas, na beiradinha da confusão, se tornam quase que automáticas com a linguagem dos conjuntos.

Ratos, cachorros e gatos. O primeiro passo é dar nome aos conjuntos, e foi o que um estudante (codinome *YdO*) fez: R = {ratos}, C = {cachorros}, G = {gatos}. Daí o enunciado diz que $(G \cap C) \supseteq \{x\}$, isto é, que existe pelo menos um elemento x no conjunto da intersecção entre G e C. Além disso, $C \subseteq R$. Logo, $\{x\} \subseteq (R \cap G)$. (*Veja a figura 3*.) Resposta (c).

Fig. 3



YdO notou que, no enunciado, a palavra “necessariamente” é importante. Por exemplo, a resposta (e): talvez exista algum gato que não seja rato, mas não necessariamente, pois, visto que o enunciado não fornece informações sobre isso, YdO não tem como apostar na validade de (e). {❑}

{3}/ Marco Bassetto, fruto do MMM

Em razão da organização lógica da matéria principal, na seção 1, não foi possível explicar adequadamente quem é o professor Marco Bassetto, e talvez o leitor fique com uma impressão errada dele. Então, o redator colocou uma explicação aqui, à parte.

Na adolescência, Marco teve a “sorte”, para usar uma palavra dele, de ter tido aulas com um professor que punha em prática as ideias do movimento matemática moderna: “Tive uma formação sólida em teoria dos conjuntos, desenho geométrico, e geometria dedutiva”, diz Marco. “Isso me encantou e me levou a ser matemático.” Quando começou a dar aulas, até tentou a mesma abordagem, mas desistiu logo, e adotou a prática de introduzir os assuntos por meio de problemas. “Isso é só uma escolha, que funciona melhor quando a classe é jovem e heterogênea. Numa classe assim, prender a atenção dos alunos é mais difícil. Então, não há nada de muito especial nessa escolha: acho que depende da classe.”

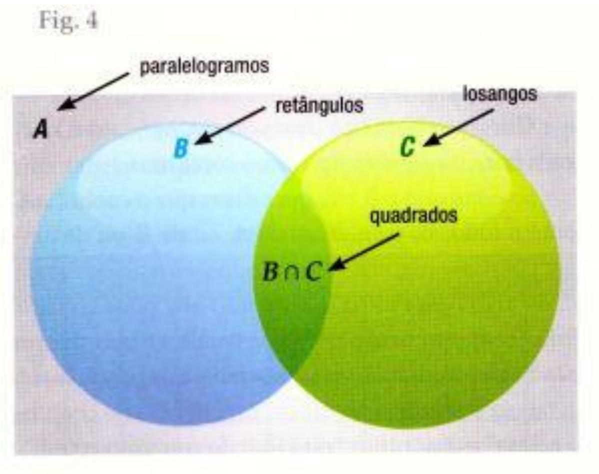
Marco apresenta o problema e, em seguida, introduz toda a teoria que for possível introduzir enquanto a classe está interessada no problema. Mas isso não significa que, se a classe perde o interesse logo, ele desiste de passar a teoria, pois não desiste: ou apresenta um problema melhor na mesma hora, ou vai atrás de um problema melhor para apresentá-lo em outra ocasião. “Ao final do ensino médio”, diz Marco, “não importa a abordagem que o professor escolha, o aluno tem de saber comunicar as ideias matemáticas oralmente e por escrito. Inclusive, ele tem de ser capaz de expressar suas ideias com a linguagem dos conjuntos. Eu acho que, ao longo do ensino médio, consigo mostrar a eles que a linguagem dos conjuntos é muito mais eficiente para passar certas ideias do que qualquer outra opção; mas confesso que, até chegar a esse ponto, por causa da abordagem que escolhi, as aulas são mais bagunçadas. Em todo caso, meu objetivo último é produzir alunos que não tenham medo de encarar um problema matemático.” {❏}

{4} ESPECIAL: Quase tudo sobre conjuntos

• Uma palavra sobre a palavra “teoria”: é o conjunto de axiomas e de teoremas decorrentes de tais axiomas, segundo as regras de inferência próprias da teoria. Neste texto, “teoria dos conjuntos” significa, portanto, “a compilação dos axiomas e dos teoremas a respeito de conjuntos”.

• A teoria dos conjuntos vem com uma linguagem própria, onde pode ver símbolos como $\subseteq$ ou $\in$. Sem essa teoria e essa linguagem, muitas vezes o matemático nem consegue expressar o que está estudando. É por isso que professores de matemática ficam aflitos, para dizer o mínimo, quando percebem que um estudante não entende nada de conjuntos.

• Como você pode definir um conjunto? Pode mencionar uma característica comum a todos os elementos. (Ou uma *propriedade* comum a todos os elementos, como os matemáticos costumam dizer.) Assim, no conjunto das coisas azuis, estão o céu (num dia ensolarado e sem nuvens) e o peixinho fêmea Dori (do desenho animado *Procurando Nemo*). Ou pode simplesmente listar seus elementos: {a, 7, §}. Mas, em geral, o matemático está interessado em conjuntos cujos elementos têm uma propriedade comum. Felipe Fujita, professor no Colégio Albert Sabin e autor de livros didáticos, explica o porquê: imagine o conjunto *A* de todos os paralelogramos; dentro desse conjunto, está o conjunto *B* com todos os retângulos e o conjunto *C* com todos os losangos, de modo que a intersecção de *B* com *C* resulta num subconjunto de *A* com todos os quadrados. (*Veja a figura 4*.) "Uma vez que isso esteja claro, daí você pode provar que as diagonais dos paralelogramos se intersectam no ponto médio de cada uma delas. E com isso pode concluir que as diagonais dos quadrados, dos retângulos e dos losangos se intersectam no ponto médio de cada uma delas!" Se você demonstra que certa afirmação vale para os membros de um conjunto, automaticamente demonstra que ela vale para qualquer subconjunto desse conjunto. Mas, para tirar proveito disso, tem de visualizar claramente qual é o conjunto e quais são seus subconjuntos.



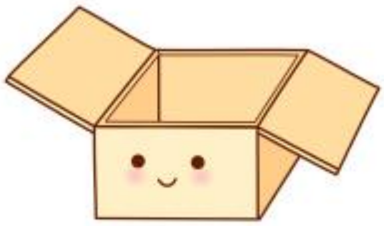
• A ideia de conjunto aparece na linguagem coloquial. Se diz a alguém: "Considere os números racionais maiores que 1", está dizendo (por exemplo): "Considere o conjunto $\{x \in \mathbf{Q} : x > 1\}$."

• $x \in \mathbf{Q}$ significa "x é elemento do conjunto **Q**". (Pode imaginar o símbolo ∈ como sendo a primeira letra da palavra "∈lemento".) Quanto a $\{x \in \mathbf{Q} : x > 1\}$, significa: "tenho aqui um conjunto de todos os elementos x; x é elemento do conjunto **Q**, mas tal que x é maior que 1".

• Um conjunto pode ser elemento de outro. (Imagine um saco de balas dentro de uma bolsa.) Assim, $\{h\} \in \{\%, 5, \{h\}\}$, mas h não é elemento de $\{\%, 5, \{h\}\}$, isto é, $h \notin \{\%, 5, \{h\}\}$; ao contrário, $h \in \{h\}$.

• Dois conjuntos são iguais se têm os mesmíssimos elementos. Isso vale mesmo que você os especifique de modo distinto. Por exemplo, {todos os números racionais maiores que 1} = $\{x \in \mathbf{Q} : x > 1\}$. A ordem dos elementos não interessa: $\{2, t\} = \{t, 2\}$.

• O conjunto {3, 3, 3, 3, 3} é igual ao conjunto {3, 3, 3, 3, …} e igual ao conjunto {3}, pois eles só têm um elemento, que é 3. Pode usar a seguinte analogia: “Embora eu possa pôr uma cópia de livro no meu conjunto, não posso pôr a mesma cópia mais de uma vez.” Agora, se o formato faz diferença, daí o conjunto {3, ③, 𝟛} é diferente do conjunto {3}. Usando a mesma analogia: “Coloquei no meu conjunto três cópias distintas do mesmo livro.”



• Na matemática atual, o conjunto vazio é perfeitamente válido. (No começo do século 20, não era assim.) Pode representá-lo com { } ou com ∅. Visto que dois conjuntos são iguais se têm os mesmos elementos, todo conjunto vazio é o mesmo conjunto vazio: só existe um ∅. Outro jeito de dizer isso: visto que todo conjunto vazio não tem elementos, você não consegue distinguir um do outro; logo, não tem escolha senão declarar que são o mesmo conjunto. Não escreva, portanto, “um conjunto vazio”; escreva sempre “o conjunto vazio”.

• Você pode especificar o conjunto vazio com uma propriedade que não existe. Por exemplo: $\{x \in \mathbf{Q} : x^2 = 2\} = \emptyset$, pois não existe número racional x cujo valor seja $\sqrt{2}$. E por que alguém definiria o conjunto vazio de modo tão complicado? Ora, ao iniciar uma investigação, o matemático começa especificando um conjunto ou vários, sem saber que, lá na frente, descobrirá que um ou vários deles são o conjunto vazio.

• O jeito certo de definir o conjunto vazio é: $\emptyset = \{x : x \neq x\}$. A definição vale por causa da lei de Leibniz, que é um dos axiomas da lógica matemática: para todo x, $x = x$.

• Não confunda o número zero com o conjunto vazio; 0 é um número real; $\emptyset$ é um conjunto. (É possível definir os números inteiros por meio de conjuntos, mas isso é outra história.)

• Subconjuntos: pode dizer que o conjunto A é subconjunto de B se cada elemento de A, sem exceção, também é elemento de B. Quando for assim, diga que "A é subconjunto de B" ou "A está contido em B"; em símbolos: $A \subseteq B$. Pode dizer também "B é superconjunto de A" ou "B contém A"; em símbolos, $B \supseteq A$. (Note a semelhança entre $\supseteq$ e $\geq$, assim como entre $\subseteq$ e $\leq$. Mais precisamente, a ideia da notação "$A \subseteq B$" é esta: "A é subconjunto de B ou talvez seja igual a B.") Como consequência lógica de tais definições, todo conjunto é subconjunto de si mesmo. Além disso, por definição, $\emptyset$ é subconjunto de todo conjunto.

• Na verdade, $\emptyset$ é subconjunto de todo conjunto não exatamente por definição. Se $\emptyset$ não fosse subconjunto de um conjunto C, deveria haver um elemento em $\emptyset$ que não está contido em C; e daí haveria um elemento em $\emptyset$. Mas não há elementos em $\emptyset$. O único jeito de sair desse imbróglio é declarar $\emptyset$ como subconjunto de todo conjunto. Mais uma vez, os matemáticos tomaram uma decisão sensata para preservar a consistência da matemática.

• Pode agora definir mais precisamente a igualdade entre conjuntos. Para quaisquer conjuntos A, B, diga que $A = B$ se, e somente se, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Em palavras, todo elemento de A deve ser elemento de B, e todo elemento de B deve ser elemento de A.

• Mais uma vez: tais definições não são firulas de matemáticos obcecados por definições difíceis para ideias óbvias. O matemático está sempre investigando conceitos que não conhece bem. A certa altura, prova que $A \subseteq B$; meses depois, descobre um jeito de provar que $B \subseteq A$. Só nessa ocasião consegue dizer que $A = B$.

• E quanto à expressão $A \subset B$? O que você diz com tais símbolos? Existe uma ambiguidade aqui. O significado correto da expressão é "todos os elementos de A estão contidos em B, mas há pelo menos um elemento de B que não está contido em A"; em outras palavras, embora A seja subconjunto de B, $A \neq B$. Nem todo mundo usa o símbolo $\subset$ dessa maneira; alguns autores usam $\subset$ como se fosse $\subseteq$. Como regra geral, se está investigando os conjuntos A e B, e sabe que A está inteiramente contido em B, mas não conhece os dois perfeitamente, escreva $A \subseteq B$. Quando tiver a certeza de que existe um elemento de B que não está contido em A, daí passe a escrever $A \subset B$, se quiser. (Leia "$A \subset B$" assim: "O conjunto A é subconjunto próprio do conjunto B.")

• Use **N** para denotar o conjunto dos inteiros positivos, **Z** para o dos inteiros, **Q** para o dos racionais, **R** para o dos reais e **C** para o dos complexos. Depois que estiver clara a ideia de *sistema* (um sistema é um conjunto e as relações e funções que pode realizar com os elementos desse conjunto), pode daí escrever $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$, e isso significa, por exemplo, que $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{C}$. Mais uma vez: tome cuidado com o que pretende dizer com tais afirmações; nem toda afirmação válida no sistema dos números reais é válida no sistema dos números complexos, e vice-versa. (Muita gente acha que, se pode escrever $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$, então qualquer afirmação que possa fazer sobre os elementos de **R** também pode fazer sobre os elementos de **C**. Essa crença é falsa.)

• Chegou a hora dos símbolos $\cap$, $\cup$, $-$, ^{C}, isto é, chegou a hora da álgebra típica dos conjuntos.

• Se escreve $A \cup B = C$, quer dizer que o conjunto C contém todos os elementos de A, ou de B, ou de ambos. Leia "o conjunto C é resultado da união de A com B", ou algo nessa linha. (É por isso que pode chamar C de "conjunto união".) Pode visualizar isso de um jeito bem matemático com uma **tabela de pertinência**; na tabela a seguir, 1 significa "está dentro do conjunto acima" e 0 significa "está fora do conjunto acima".

A	***B***	***C* = *A* ∪ *B***
0	0	0
0	1	1

1	0	1
1	1	1

Veja um jeito de interpretar a tabela: “Se não é elemento de *A* e não é elemento de *B*, não é elemento de *C*. Se não é elemento de *A*, mas é elemento de *B*, então é elemento de *C*. Se é elemento de *A*, mas não é elemento de *B*, então é elemento de *C*. Se é tanto elemento de *A* quanto elemento de *B*, então é elemento de *C*.”

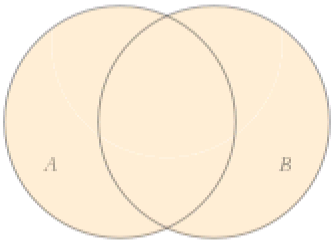


Figura 5

• **Pertinência**: É a qualidade ou condição de pertencente. Uma tabela de pertinência é uma tabela que mostra qual elemento pertence a qual conjunto.

• Alguns autores, em vez de 1 e 0, usam D e F, de “dentro” e “fora”. Mas 1 e 0 remetem à lógica binária, à álgebra de Boole, aos números na base 2. Note que, na tabela, você está contando na base 2, pois 0, 1, 2, 3, na base 10, vira 00, 01, 10, 11 na base 2. Com a álgebra dos conjuntos, você está um passo mais perto de compreender os computadores, que são máquinas especialmente desenhadas para manipular números na base 2.

• Como consequência lógica da tabela acima, para todo conjunto A, B, C, valem as igualdades: $A \cup A = A$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup B = B \cup A$ (a união de conjuntos é comutativa), $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (a união de conjuntos é associativa). Vale a pena montar uma tabela de pertinência para verificar a validade da última igualdade, e fique de olho na figura 6 mais abaixo.

A	B	C	$A \cup B$	$B \cup C$	$(A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cup C)$

0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Visto que as duas últimas colunas (à direita) são idênticas, pode dizer que as duas expressões no topo de cada coluna se equivalem; pois, se um elemento está fora de $(A \cup B) \cup C$, está fora de $A \cup (B \cup C)$; se está dentro de $(A \cup B) \cup C$, está dentro de $A \cup (B \cup C)$. E isso é um jeito de dizer que os dois conjuntos $(A \cup B) \cup C$ e $A \cup (B \cup C)$ são idênticos em tudo e por tudo.

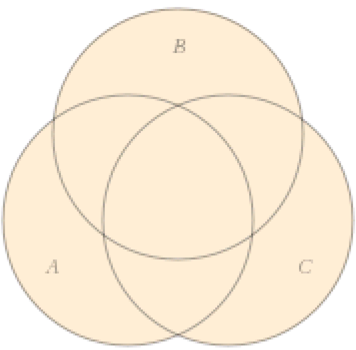


Fig. 6

• Visto que a união de conjuntos é comutativa e associativa, pode dispensar os parênteses, isto é: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$. Se quiser denotar a união de n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, simplesmente escreva:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

• Com a expressão $C = A \cap B$, você diz que formou o conjunto C com os elementos que tanto fazem parte de A quanto fazem parte de B também. (Pode chamar C de "conjunto intersecção", se quiser; *veja a figura 7*.) A tabela de pertinência é:

A	***B***	***C* = *A* ∩ *B***
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

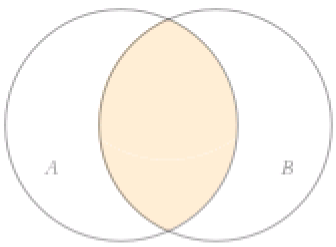


Figura 7

• Consequências lógicas, que pode verificar facilmente com tabelas de pertinência: se A, B, C denotam conjuntos, $A \cap A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap B = B \cap A$ (a intersecção de conjuntos é comutativa); $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (a intersecção de conjuntos é associativa). Sendo assim, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$. Além disso, como já fez antes, se quiser denotar $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n$, escreva:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

• Se quiser um truque visual para recordar o significado dos símbolos de ∪nião e de i∩tersecção, ei-lo.

• Existem duas igualdades famosas, e pode facilmente prová-las com tabelas de pertinência. Uma delas é $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. A outra é $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. (*Ambas estão na figura 8*.)

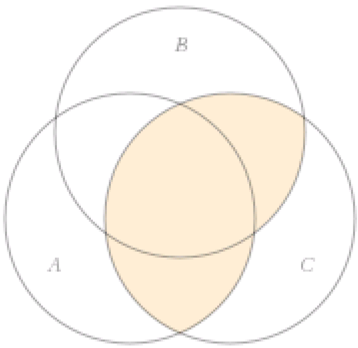


Figura 8B

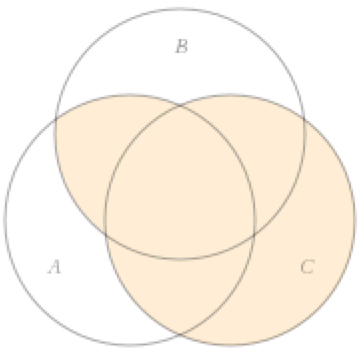


Figura 8A

• Às vezes você quer saber a diferença entre dois conjuntos *A* e *B*. Com *A* – *B*, você denota o conjunto que pode formar com os elementos que estão apenas em *A*, mas não em *B*. (Às vezes, um autor denota essa ideia com *A**B*; *veja a figura 9*.) A tabela de pertinência de *A**B* e de *B**A* é:

A	***B***	***A – B***	***B – A***
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

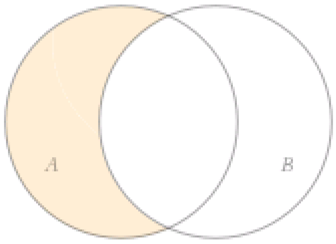


Figura 9: A\B

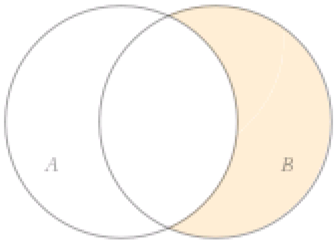


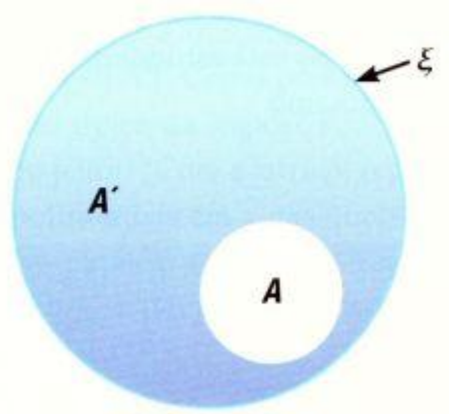
Figura 9: B\A

• Pode chamar o conjunto $A - B$ de “conjunto diferença” ou “conjunto da diferença”, se o leitor souber do que se trata. Se não souber, diga a frase por completo: “O conjunto da diferença entre A e B.” Note que o conjunto da diferença entre B e A, que deve denotar com $B - A$, só será igual ao conjunto $A - B$ se $A = B$; nesse caso, $A - B = B - A = \emptyset$.

• O conjunto universo é o conjunto com todos os elementos que talvez pudessem estar nos conjuntos os quais está estudando. Pode chamá-lo de ξ, se quiser. (É a letra grega *qui* minúscula.) Apesar do nome, “conjunto universo”, você faz bem se limitar ao máximo os tipos de elementos que pretende imaginar dentro de ξ. Em 1901, Bertrand Russell demonstrou que o conjunto de todos os conjuntos contém a si mesmo, já que é um conjunto, e que isso leva a um paradoxo; desde então os matemáticos passaram a tomar cuidado com o conjunto universo ξ: em especial, passaram a evitar qualquer conjunto que seja elemento de si mesmo. (Hoje, a definição correta de conjunto diz que ele não pode ser elemento de si mesmo, isto é, se x é um conjunto, então $x \notin x$.) Assim, se estiver lidando com números, talvez possa considerar ξ como o conjunto dos reais, ou quem sabe o dos complexos. Se estiver lidando com cores, pode considerar ξ como o conjunto de todas as cores, ou então como o conjunto com todos os conjuntos finitos de cores (faça seu leitor notar que $\xi \notin \xi$). Se tomar cuidados semelhantes a esses, daí pode usar uma propriedade muito útil de ξ: ele contém todos os elementos com os quais está lidando, e todos os conjuntos os quais está estudando são subconjuntos de ξ; e se você provar que certa propriedade vale para ξ automaticamente provou que ela vale para todos os subconjuntos de ξ. (Exceção natural feita ao subconjunto $\emptyset$; pois de que jeito um conjunto sem elementos pode ter elementos com alguma propriedade, como, por exemplo, a propriedade de ser par?)

• Agora já pode compreender a ideia do complemento de um conjunto A: é o conjunto que pode formar com todos os elementos que não pertencem a A. Pode denotá-lo com o símbolo A^C (ou com A‘); quanto à definição correta, ela é: $A^C = \xi - A$, isto é, o complemento de A é o conjunto de todos os elementos de ξ (que você especificou previamente), exceto os elementos que fazem parte de A. (*Veja a figura 10*.)

Fig. 10



• Algumas consequências lógicas, que deve verificar com tabelas de pertinência: $\xi^C = \emptyset$; $\emptyset^C = \xi$; para todo A, $(A^C)^C = A$; para todo A, $A \cap A^C = \emptyset$ e $A \cup A^C = \xi$; além disso, $A \cup \xi = \xi$ e $A \cap \xi = A$.

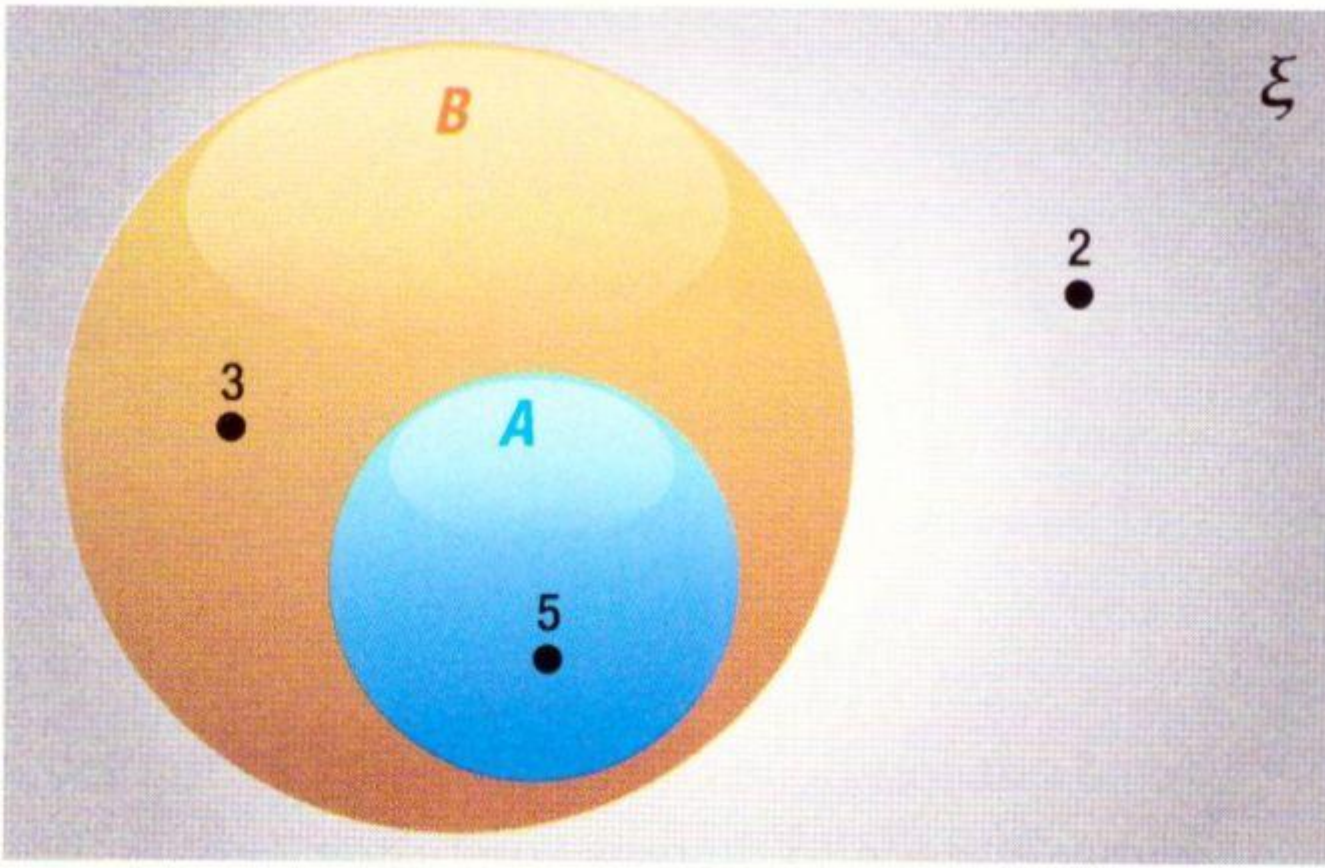
• Já está em condições de compreender uma ideia interessante a respeito de dois conjuntos A, B, ambos subconjuntos de um conjunto universo ξ: se $A \subseteq B$, então $B^C \subseteq A^C$. Pode provar isso com a tabela de pertinência a seguir, e ver a validade da implicação com a figura 11 (*mais abaixo*).

A	***B***	$\boldsymbol{A^C}$	$\boldsymbol{B^C}$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	0

Na figura 11 (*abaixo*), o elemento rotulado com o algarismo 2 ilustra a segunda linha da tabela: se não é elemento de A nem de B, é elemento tanto de A^C quanto de B^C. O elemento 3 ilustra a terceira linha: se não é elemento de A, mas é elemento de B, então é elemento de A^C, mas não elemento de B^C. A quarta linha da tabela não faz sentido, porque $A \subseteq B$, e por isso todo elemento de A é elemento de B. (Se essa quarta linha for válida, então $A \nsubseteq B$.) Por fim, o elemento 5 ilustra a quinta linha da tabela: se é elemento de A, é também de B, e portanto não é elemento nem de A^C nem de B^C. Pode olhar a questão assim, se quiser: de certo modo, o conjunto A^C é maior que o conjunto B^C, ou no mínimo igual.

Note que, neste caso, ou um elemento pertence a A, ou a B, ou a ξ. Jamais acontece de um elemento estar fora de ξ, pois você imaginou a situação toda para que assim fosse. Por exemplo, se está estudando uma questão da teoria dos números, pode fixar o conjunto universo como sendo o conjunto **C** dos complexos. Jamais terá de decidir o que fazer com filhotes de hipopótamo nascidos no Parque Nacional Kruger, na África do Sul, pois está estudando números, e não filhotes de hipopótamo.

Fig. 11



• Às famosas leis de De Morgan, a partir das quais os matemáticos fazem milagres: para quaisquer dois conjuntos A, B, ambos subconjuntos de um conjunto universo ξ, $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$; além disso, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$. Pode ver por que tais leis valem com as tabelas de pertinência a seguir e a figura 12. (Na figura, os números associados aos pontos se referem à respectiva linha da tabela: o ponto 3 se refere à linha 3, etc. *A mesma figura 12 vale para as duas tabelas*.)

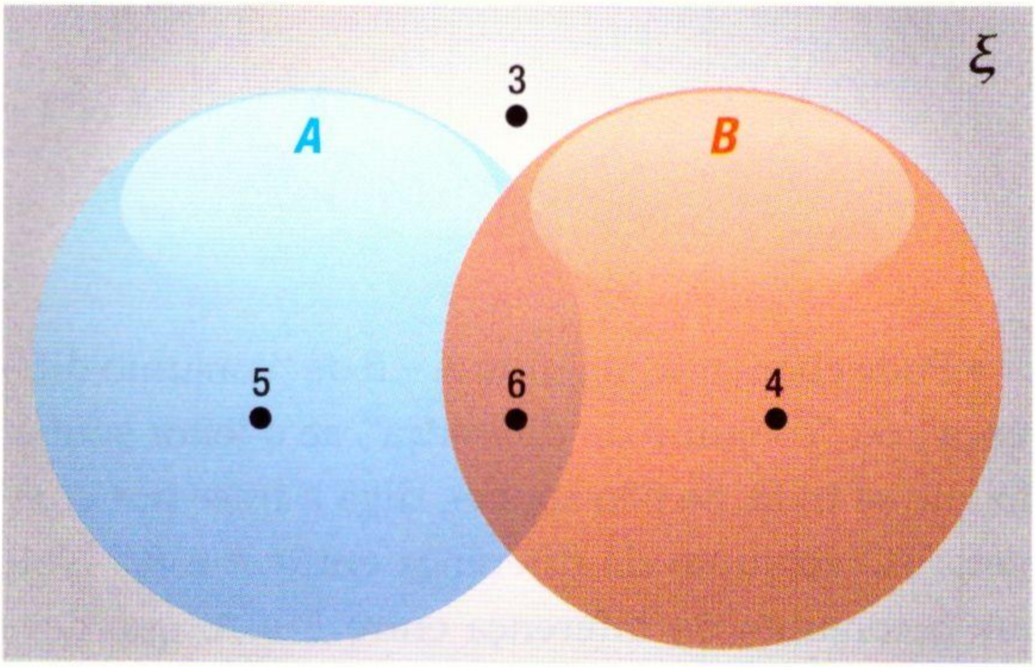
$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B)^C$	A^C	B^C	$A^C \cap B^C$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

A	B	$A \cap B$	$(A \cap B)^C$	A^C	B^C	$A^C \cup B^C$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Fig. 12



• Usando as leis de De Morgan, mais o fato de que $(A^C)^C = A$, pode dizer que $A \cup B = (A^C \cap B^C)^C$ e que $A \cap B = (A^C \cup B^C)^C$. Com essas duas igualdades, pode provar, desta vez com a álgebra dos conjuntos, as duas igualdades que provou mais acima com tabelas de pertinência [$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$].

• Dizem os matemáticos que a álgebra dos conjuntos tem a propriedade de frutificar o resultado das demonstrações matemáticas. Pois, se você prova que $(A \cup B) \cap C$ implica algum fato matemático, então também provou que $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ implica esse mesmo fato.

• Como a palavra "implica" sugere, há uma conexão entre a lógica e a teoria dos conjuntos. Na verdade, especialistas no assunto dizem que conseguem verter toda afirmação lógica em linguagem dos conjuntos, e muitas vezes, ao realizar tal versão, ficam com as ideias mais claras.

Por exemplo, imagine uma função polinomial $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ do tipo a seguir:

$$y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$
$$= \sum_{0}^{n} a_ix^i$$

Nessa equação, a_i é uma constante real. (Na linguagem dos conjuntos, $a_i \in \mathbf{R}$.) Daí, se fizer $a_i = 0$ para todo i ímpar, pode provar que $f(-x) = f(x)$ para todo x, isto é, pode dizer que f se transforma numa função par (ao plotá-la, verá que o eixo das ordenadas vira eixo de simetria; como exemplo, imagine uma parábola do tipo $y = x^2$). Isso porque, se k é um inteiro positivo par, $x^k = (-x)^k$, já que $(-1)(-1) = 1$. Como poderia expressar isso com a notação típica da lógica? Pode, por exemplo, declarar a seu leitor: "Com a letra A, represento todas as funções polinomiais em x nas quais os expoentes de x são todos pares; com a letra B, represento todas as funções pares." E daí pode afirmar:

$$A \Rightarrow B$$

Essa expressão, "A implica B", é no fundo uma afirmação sobre conjuntos. Eis um jeito de pensar nisso: pode imaginar um conjunto universo ξ com todas as funções, dentro do qual há um subconjunto B com todas as funções pares, dentro do qual há um subconjunto A com todas as funções polinomiais nas quais $a_i = 0$ para todo i ímpar, de modo que $A \subseteq B \subseteq \xi$. Daí a expressão "$A$ implica B" se transforma simplesmente em $B \supseteq A$, isto é, B contém A. (Neste caso, você *sabe* que B contém A e que é diferente de A, e por isso até poderia usar a expressão $B \supset A$. Mas, em muitas investigações, uma informação dessas não estará tão clara; é por isso que deve registrar "A implica B" com $B \supseteq A$, querendo dizer: "Sei que B contém A, mas não estou afirmando peremptoriamente que A e B são diferentes, pois talvez sejam iguais.") Agora vai desenhar uma tabela de pertinência um pouco diferente, com a letra V para verdadeiro e a letra F para falso:

A	***B***	**$B \supseteq A$ (ou $A \Rightarrow B$)**
0	0	*V*

0	1	*V*
1	0	*F*
1	1	*V*

(Usou as letras *V* e *F* debaixo de $B \supseteq A$ porque a expressão $B \supseteq A$ não denota um conjunto específico, mas sim uma comparação entre conjuntos; não faz sentido falar, portanto, em pertinência.)

Com a segunda linha da tabela, disse que, se um elemento não está nem A nem em B, então ele não te dá nenhuma informação sobre se B contém A, e portanto talvez B contenha A. (Essa linha da tabela de pertinência é mera convenção.) Para ficar no exemplo, com a segunda linha, disse que, se uma função não pertence a B ou a A, isso não te autoriza a dizer que $B \not\supseteq A$. Com a terceira linha, disse que, se um elemento está em B, mas não está em A, então ele te passa a informação de que B talvez seja maior que A e inclua A, e por isso a implicação permanece válida. (Convenção também; note que, em situações de pesquisa, nas quais o matemático está tateando, talvez $A = \emptyset$.) No exemplo, com a terceira linha, disse que, se uma função é par, mas não é uma função polinomial em x tal que $a_i = 0$ para todo i ímpar, isso não o autoriza a dizer que tais funções polinomiais não são pares; logo, a implicação continua válida. Com a quarta linha, disse que, se um elemento está em A, mas não em B, obviamente B não contém A, o que torna a implicação inválida. No exemplo, significa dizer que, se alguém achasse uma função polinomial em x, não par, tal que $a_i = 0$ para todo i ímpar, daí esse contraexemplo invalidaria a implicação. (Ninguém vai achar uma função assim.) Com a quinta linha, disse que, se um elemento arbitrário de A também está em B, então todo elemento de A está em B, e portanto B contém A. No exemplo, foi exatamente isso o que fez ao redigir a prova de que função polinomial em x tal que $a_i = 0$ para todo i ímpar é uma função par: provou que $B \supseteq A$.

• Muitas outras tabelas de pertinência são equivalentes à tabela que acabou de examinar. Por exemplo, já sabe que, se $B \supseteq A$, então $A^C \supseteq B^C$. (Ou, o que é a mesma coisa: se $A \longrightarrow B$, então $\neg B \longrightarrow \neg A$; o nome dessa última afirmação é *contrapositiva*.) Logo, sabe o seguinte: se f é uma função polinomial em x, mas não é par, então ela contém pelo menos um $a_i \neq 0$ com i ímpar. Provou um teorema e, com a teoria dos conjuntos, ganhou outro extra.

• Uma imagem mental útil: para interpretar $A \rightarrow B$, pense: "Se a implicação for verdadeira, caso uma lampadinha de A se acenda, significa que uma lampadinha de B se acendeu também, pois todas as lampadinhas de A são ao mesmo tempo lampadinhas de B. Contudo, não necessariamente todas as lampadinhas de B são lampadinhas de A, e por isso $A \rightarrow B$ não necessariamente implica $B \rightarrow A$."

• Alexandre Casassola diz que, muitas vezes, é mais fácil entender uma proposição lógica com a linguagem dos conjuntos. Cita um exemplo, que viu no livro *Set Theory and Logic* (Dover, 1979):

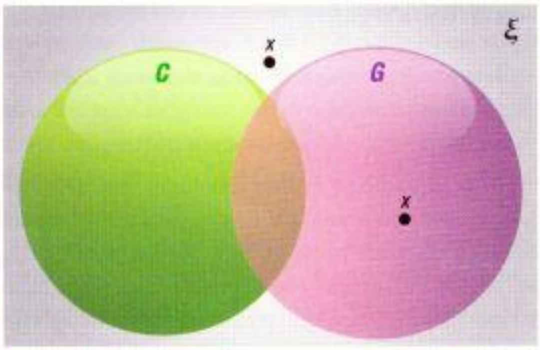
1. A maioria das crianças gosta de chocolate.

2. Eu não sou uma criança.

3. Logo, eu odeio chocolate.

A conclusão não se segue das premissas, o que pode ver claramente num diagrama de Venn (*figura 13*): imagine o conjunto universo ξ com todos os seres humanos, o subconjunto C de ξ com todas as crianças, e o subconjunto G de ξ com todos os que gostam de chocolate. Se chama o elemento "eu" de x, daí sabe que $x \in C^C$, e isso significa que x talvez esteja no conjunto $G - C$, ou talvez esteja no conjunto $\xi - (C \cup G)$; isto é, sabe que x talvez não goste de chocolate, ou talvez adore.

Fig. 13



• Muitas vezes, é importante estudar todos os subconjuntos de um conjunto. Bem, com a sigla □(*F*), você denota o conjunto com todos os subconjuntos do conjunto *F*; □(*F*) se chama "conjunto potência de *F*" ou "conjunto das partes de *F*". Se *F* tem *n* elementos, daí □(*F*) tem 2^n elementos. O melhor jeito de ver isso é, mais uma vez, contar na base 2, feito um computador. Suponha, por exemplo, que *F* = {*b*, *c*, *d*, *e*}; daí □(*F*) tem 2^4 = 16 elementos, como pode ver na tabela 1. (Nessa tabela, 0 agora significa "não considere o elemento acima" e 1 significa "considere o elemento acima".)

Tabela 1

b	***c***	***d***	***e***	**Elemento de □(*F*)**
0	0	0	0	∅
0	0	0	1	{*e*}
0	0	1	0	{*d*}
0	0	1	1	{*d*, *e*}
0	1	0	0	{*c*}
0	1	0	1	{*c*, *e*}

0	1	1	0	$\{c, d\}$
0	1	1	1	$\{c, d, e\}$
1	0	0	0	$\{b\}$
1	0	0	1	$\{b, e\}$
1	0	1	0	$\{b, d\}$
1	0	1	1	$\{b, d, e\}$
1	1	0	0	$\{b, c\}$
1	1	0	1	$\{b, c, e\}$
1	1	1	0	$\{b, c, d\}$
1	1	1	1	$\{b, c, d, e\}$

• Note que d é elemento de F, e pode denotar isso com $d \in F$; mas $\{d\}$ é subconjunto de F, $\{d\} \subseteq F$, e $\{d\}$ é também elemento de □(F), $\{d\} \in$ □(F). Mas $\{d\} \notin F$ e $d \notin$ □(F).

• O cardinal de um conjunto é o número de elementos do conjunto. O cardinal de F é 4, isto é, $\#F = 4$. O cardinal de □(F) é $2^4 = 16$, isto é, #□(F) = 16. Portanto, o número de subconjuntos de um conjunto é o cardinal do conjunto potência.

• Como a tabela 1 deixa claro, o cardinal do conjunto potência de F (com 4 elementos) vale 2^4 porque, tendo quatro casas para contar de 0000 a 1111 na base 2, você consegue contar de 0 a 15 na base 10, e assim consegue rotular 16 subconjuntos. É por isso que, se um conjunto A tem n elementos, □(A) tem 2^n elementos.

• É possível falar da cardinalidade de conjuntos infinitos, assim como do conjunto potência de conjuntos infinitos, mas esse é um assunto complicado demais para este texto.

• Agora, a ideia de produto cartesiano, que é tão importante na matemática pura e aplicada. Imagine *n* conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. O produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n = \prod A_i$ é o conjunto de *todas* as ênuplas ordenadas $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, nas quais $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3, \ldots, a_n \in A_n$.

• Exemplo: se $H = \{a, b, c, d\}$ e $K = \{1, 5, 7\}$, daí o produto cartesiano $H \times K$ é o conjunto de pares ordenados a seguir:

	a	b	c	d
1	$(a,1)$	$(b,1)$	$(c,1)$	$(d,1)$
5	$(a,5)$	$(b,5)$	$(c,5)$	$(d,5)$
7	$(a,7)$	$(b,7)$	$(c,7)$	$(d,7)$

• Note que, se $H \neq K$, $(H \times K) \neq (K \times H)$.

• Pode definir $H \times K$ assim: $H \times K = \{(h, k) : (h \in H) \wedge (k \in K)\}$.

• Se qualquer um dos conjuntos A_i for $\emptyset$, o produto cartesiano $\prod A_i$ é o próprio $\emptyset$, pois não pode selecionar um elemento de $\emptyset$ para montar uma ênupla. Se nenhum desses conjuntos A_i for $\emptyset$, e pelo menos um deles for infinito, o produto cartesiano $\prod A_i$ é um conjunto infinito também. Por último, se nenhum desses conjuntos A_i for $\emptyset$, e se todos eles tiverem número finito de elementos, o produto cartesiano $\prod A_i$ contém $\#(A_1) \cdot \#(A_2) \cdot \#(A_3) \cdot \cdots \cdot \#(A_n)$ elementos.

• Definição de função, usando os conjuntos *H* e *K* como guia: uma função *f* é um subconjunto do produto cartesiano $H \times K$ tal que, para cada $h \in H$, sem exceção, existe exatamente um par ordenado (h, k) pertencente a *f*.

• Portanto, para que *f* exista, os dois conjuntos *H* e *K* têm de ser conjuntos não vazios; cada elemento de *H*, sem exceção, faz parte de um e apenas um par ordenado (h, t); sendo assim, se $(h, a) = (h, b)$, então $a = b$. Pode ver na figura 14 uma das funções possíveis entre as doze funções contidas em $H \times K$.

	a	b	c	d
1	$(a,1)$	$(b,1)$	$(c,1)$	$(d,1)$
5	$(a,5)$	$\boxed{(b,5)}$	$\boxed{(c,5)}$	$(d,5)$
7	$\boxed{(a,7)}$	$(b,7)$	$(c,7)$	$(d,7)$

Figura 14

• Chame o conjunto H de “domínio” ou “conjunto de partida”; o conjunto K, de “contradomínio” ou “conjunto de chegada”; e chame de “imagem” o subconjunto com os elementos de K que entraram nalgum par ordenado $(h, k) \in f$.

• Agora, pode generalizar um pouco mais a ideia de função usando, como referência, o produto cartesiano $\prod A_i$. Se nenhum $A_i = \emptyset$, pode definir a função h assim: é um subconjunto de $\prod A_i$ tal que, para cada elemento $a_1 \in A_1$, sem exceção, existe uma e apenas uma ênupla ordenada $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \in \prod A_i$. Assim, A_1 fica sendo o domínio e $\prod A_i$, o contradomínio.

• Matemáticos gostam de definir funções dessa maneira, pensando nelas como subconjuntos de produtos cartesianos, pois assim dispensam a palavra “regra”, tão comum na definição escolar de função. Muitas vezes, eles conhecem os conjuntos envolvidos na função, e até sabem montar as ênuplas que são elementos da função, mas não conhecem a regra, que é justamente o que estão tentando descobrir. Com essa definição baseada em conjuntos, eles também ficam dispensados de apresentar a função como se fosse uma máquina de fazer salsichas, já que é péssima a analogia da máquina que transforma, por exemplo, x em y; pois tal analogia presume que a função faz alguma coisa com os elementos do domínio, quando ela na verdade não faz nada; ela simplesmente correlaciona cada elemento do domínio, sem exceção, com exatamente um dos elementos do contradomínio. Só isso.

• Por muitas décadas os matemáticos usaram a ideia de par ordenado e de ênupla ordenada, mas algo os incomodava. Não existe, na teoria dos conjuntos e na linguagem dos conjuntos, a ideia de “direita” e “esquerda”, “antes” e “depois”. Afinal, na teoria dos conjuntos, os conjuntos $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ são o mesmo conjunto, pois cada elemento de um é elemento do outro, e vice-versa. Só em 1921 Kazimierz

Kuratowski, matemático polonês, foi capaz de criar a definição que todos usam até hoje:

$$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$$

Em razão dessa definição inteligente, agora (a, b) = (c, d) se, e somente se, $a = c$ e $b = d$. Note que Kuratowski não recorreu a palavras como direita e esquerda. Você pode adaptar essa definição para ênuplas com qualquer número de elementos, e até mesmo para ênuplas com número infinito de elementos.

• Até 1933, muitos matemáticos achavam que seria impossível dar uma fundação rigorosa para a teoria da probabilidade. Foi quando o matemático russo Andrei Nikolaevich Kolmogorov publicou o tratado *Fundações da Teoria da Probabilidade*, e deu ao assunto uma base rigorosa — elaborada de cabo a rabo com a teoria dos conjuntos. A primeira frase importante do livro é: "Seja E um conjunto de elementos ξ, η, ζ, …, que vamos chamar de *eventos elementares*, e seja R o conjunto dos subconjuntos de E; vamos chamar os elementos de R de *eventos aleatórios*." É assim que começa um dos textos mais importantes na história da humanidade. {**FIM**}

Observações:

1. Publiquei essa matéria pela primeira vez na revista *Cálculo: Matemática para Todos*, edição 50, março de 2015, pág. 24. A versão que acabou de ler foi revista e atualizada.

2. As entrevistas foram feitas pelos jornalistas **Felipe Dreher** e **Renato Mendes**.

3. As figuras 3, 4, 10, 11, 12 e 13 foram feitas pelo artista gráfico **Henrique Arruda**.

4. O título da seção 4, "Quase Tudo Sobre Conjuntos", é um patente exagero; penso que perdoável numa publicação paradidática de caráter jornalístico. O livro de Paul Halmos sobre teoria dos conjuntos, *Naive Set Theory*, tem pouco mais de 100 páginas e é difícil.

REFERÊNCIAS

https://pt.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica_Moderna>acesso em 20/05/2020

https://pt.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica>acesso em 20/05/2020

https://pt.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo>acesso em 20/05/2020

https://imaginariopuro.wordpress.com/2016/09/22/conjuntos-os-alicerces-da-matematica/>acesso em 20/05/2020